9386

II

Bibl. Jag.

III 7 1

Geometrya analityczna

Zima 1899/1900

Co to jest geometrya analityczna, Panowie i tak wszystkim wiadomo, wszak Panowie z czasów gimnazyalnych przyswoili pierwsze elementa tej umiejętności. Geom. analityczna różni się od geometryi syntetycznej (t. j. geometryi na sposób Euklidesa uprawianej) nie rezultatami i nie przedmiotem – te są takie same w obu wypadkach – tylko metodą. Podczas gdy geom. syntetyczna zbudowana jest na samych rozumowaniach bezpośrednich sztucznie ułożonych w pewien system, bez używania symbolów i metod rachunku algebraicznego to przeciwnie geometrya analityczna polega na tem, że problemat geometryczny zostaje zastąpionym zapomocą wprowadzenia spółrzędnych przez problemat algebraiczny, do którego możemy zastosować wszystkie metody algebry, w których jesteśmy wiele bieglejsi, i z rezultatu osiągniętego zapomocą rachunku dopiero znów odwrotnie napowrót wyciągamy wnioski geometryczne. Która metoda praktyczniejsza jest, tego nie można z góry orzekać, to zależy od problematu, ale w każdym razie geom. analityczna ma to za sobą że jest więcej systematyczną i że nadaje się doskonale do zastosowań bezpośrednich n. p. w fizyce, podczas gdy g. synt. pod tym względem wielkie przedstawiałaby trudności. Zresztą jest to poczęści i rzeczą gustu i wprawy, n. p. Anglicy mają szczególne upodobanie w metodach geometryi syntetycznej i wiele w nich są bieglejsi niż my; z tego powodu nam wprzeciętnie tak trudno jest zrozumieć n. p. rozprawy fizyczne angielskie. Właściwie głównym przedmiotem naszego kursu ma być geometrya analityczna przestrzeni – i ona też jest najogólniejszą, która obejmuje wszystkie inne jako

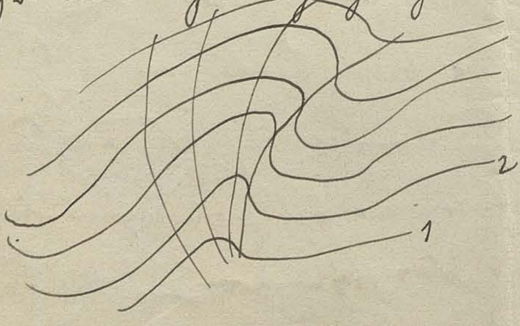
specyalne przypadki, ale ze względów praktycznych rozpoczniemy naprzód geometryę płaską, z której w prędkości ~~po~~ zapoznamy się z najważniejszemi częściami, ~~by potem módz się~~ to nam ułatwi potem bardzo geometryę przestrzeni, która jest całkiem analogiczna. ~~Stan~~

Geometrya płaska jest znów właściwie tylko przypadkiem specyalnym geometryi powierzchniowej. Możnaby n.p. tak samo także badać właściwości krzywych na kuli i utworzyć geometryę kulistą — trygonometrya sferyczna tworzyłaby wtedy część tej geometryi kulistej. Albo geometryę elipsoidalną i.t.p. Naturalnie żadna z nich tej ważności nie posiadałaby i nie byłaby tak prosta jak właśnie geometrya ~~figur~~ utworów płaskich.

Najczęściej rozpowszechniony rodzaj geom. płaskiej jest ten gdzie punkt każdy oznacza się zapomocą dwuch spółrzędnych. Nie jest to koniecznem żądaniem — poznamy bowiem później n.p. także spółrzędne t.z. liniowe, gdzie prostą oznacza się dwoma spółrzędnemi a ~~dla~~ punkta przez równanie między niemi.

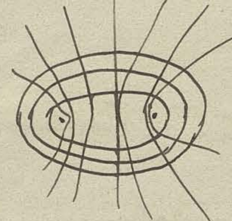
Spółrzędne ~~mo~~ które mają służyć do oznaczenia punktu mogą być proste lub krzywe linie najróżnorodniejszych gatunków.

N. p.



Jeśli mamy dwa systemy ~~więcej~~ krzywych tego rodzaju, w których każda krzywa odpowiada pewnej liczbie to dla przecięcia oznacza punkt, i wartości tych liczb = spółrzędne.

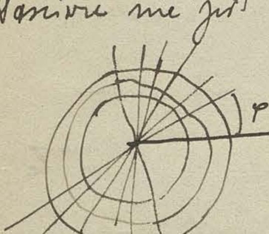
Jakiego rodzaju krzywe się obierze to zależy od natury problematu i nie zawsze najpraktyczniejszemi są spółrzędne proste. N.p. we fizyce przy niektórych zadaniach odnoszących się do potencyału elipsoidy używa się t.zw. spółrzędne eliptyczne



w innych wypadkach odnoszących się do ~~ci~~ ciał. ~~w~~ kształtu obręczy ~~używa~~ bardzo praktyczne są spółrzędne „toroidalne" etc.

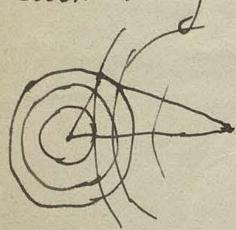
Spółrzędne bardzo często używane są tak zw. spółrzędne biegunowe (polarne),

Właściwie nie jest to nic innego jak system prostych i kół koncentrycznych



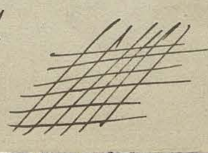
Jeżeli środek jest ustanowiony, to potrzebujemy wiedzieć tylko odległości r aby oznaczyć pewne koło, i kąt φ ~~aby oznaczyć~~ rachowany od pewnego promienia zero, aby oznaczyć pewną prostą. Te dwa spółrzędne r, φ oznaczają punkt gdzie one się przecinają.

Znów inny system: ~~podwójny~~ dwubiegunowy (bipolar)



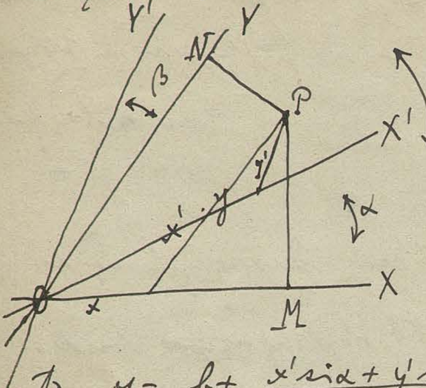
r_1 r_2

Jeżeli promienia kół staną się nieskończenie wielkie i ~~naturalnie~~ tak samo także ich odległości, to koła zamienią się w proste i otrzymamy zwykły system dobrze nam znany spółrzędnych prostych



i tem nadal najczęściej będziemy się zajmowali.

Związek między różnemi systemami spółrzędnych prostych, przekształcenie.



$y \sin \omega = x' \sin \alpha + y' \sin(\omega+\beta)$

$x \sin \omega = x' \sin(\omega-\alpha) - y' \sin \beta$

~~zatem x~~, y

Jeżeli jeszcze początek spółrzędnych przesuniemy o a b

to $y = b + \dfrac{x' \sin \alpha + y' \sin(\omega+\beta)}{\sin \omega}$

$x = - \text{———} -$

} Tego naturalnie pamiętać sobie nie potrzeba, resultat ważny tylko ten,

że x y = funkcye liniowe (pierwszego stopnia) x' y' i odwrotnie

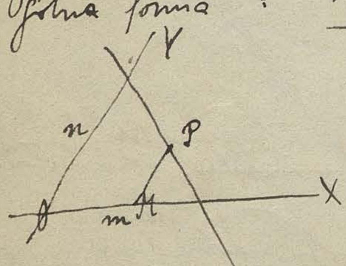
Z czego dalej wynika że stopień równania $F(x, y) = 0$ nie zmieni się przez przejście do innego układu spółrzędnych prostych, tylko stałe wielkości otrzymują inną wartość. $F(a+a'x'+a''y', b+b'x'+b''y') = 0$

Z tego już wynika że to co przedewszystkiem stanowi charakter krzywej jest stopień jej równania.

Równanie pierwszego stopnia = prosta.

Ogólna forma: $Ax + By + C = 0$ (odcinkami prost.) Pokażemy że to da się przemienić w formy pewnej

Potrzebne tylko dwie stałe m, n



$y : n = m - x : m$

$\frac{y}{n} = \frac{m-x}{m} = 1 - \frac{x}{m}$ więc $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

Równanie ~~[illegible]~~ symetryczne (Knotenpunkt)

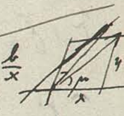
A na tę formę ogólną możemy ~~x~~ przemienić ową formę dzieląc przez C:

$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = +1$ $\quad -\frac{C}{A}$ i $-\frac{C}{B}$ są odcinki m, n

Jeżeli $C=0$ wtedy $\frac{y}{x} = -\frac{A}{B}$ więc prosta przez początek systemu

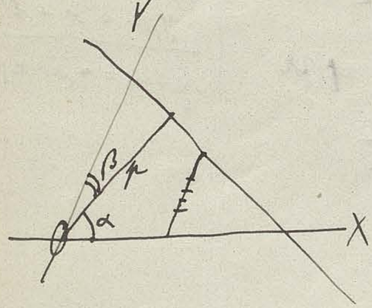
$A=0$, $B=0$ } równoległe z osią Y, X

$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x}$, $\lim x = \infty$, $\lim \frac{y}{x} = a = \frac{\sin\mu}{\sin\nu}$



Forma rozwinięta: $y = ax + b$ | jeżeli $\omega = 90°$ jednak $a = \operatorname{tg}\alpha$

Forma normalna



prosta jest oznaczona jeżeli znamy n. p. p i α więc musi być możliwe przez nie wyrazić równanie

$$m = \frac{p}{\cos\alpha} \qquad n = \frac{p}{\cos\beta}$$

$$x\frac{\cos\alpha}{p} + y\frac{\cos\beta}{p} = 1 \qquad = \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$$

W razie jeżeli $\omega = 90°$: $\beta = 90 - \alpha$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

Wreszcie w współrz. biegunowych: $r\cos(\varphi - \alpha) = p$

Jak przemienić ogólną formę w formę normalną?

$$Ax + By + C = 0$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda A &= \cos\alpha\\ \lambda B &= \sin\alpha\\ \lambda C &= -p\end{aligned}\right\} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

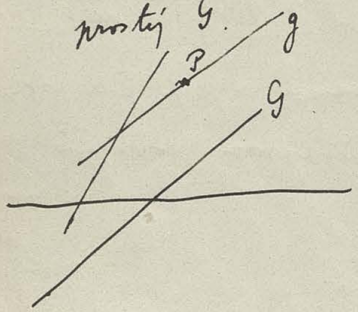
$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{}} \qquad -p = \frac{C}{\sqrt{}}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{}} = 0$$

(podobnie i w ogólnym wypadku)

Tam położenie prostej było oznaczone przez m, n albo a, b lub p, q, w ogóle muszą być dane 2 warunki

n.p. Prosta przechodząca przez punkt $x_1 y_1$ i ~~podzielona~~ równoległa do prostej G.



$G \ldots \quad Ax + By + C = 0$

$g \parallel G \ldots \quad A'x + B'y + C' = 0$

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{1}{\lambda}$$

$$y = ax + b$$
$$y = ax + b'$$
$$y_1 = a x_1 + b'$$
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$A' = \lambda A$$

$$\lambda A x + \lambda B y + C' = 0$$

$$Ax + By + \frac{C'}{\lambda} = 0$$

$$A x_1 + B y_1 + \frac{C'}{\lambda} = 0$$

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Podobnie: prosta przechodząca przez pewien punkt i tworząca pewien kąt z inną prostą. N.p. jeśli $\perp$ to $\frac{A}{B} = -\frac{B'}{A'}$ etc.

Prosta przechodząca przez 2 punkty

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ y_1 = a x_1 + b \\ y_2 = a x_2 + b \end{array}\right\} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a$$

$$b = y_1 - x_1 \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

$$y = \frac{(y_1 - y_2)x + x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$$

Stąd warunek żeby 3 punkty leżały w prostej:

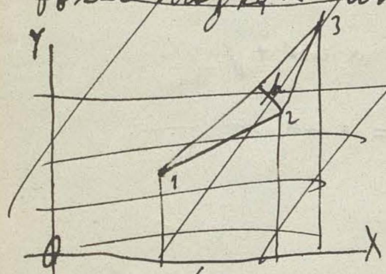
$$(x y_1 - x_1 y) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y - x y_2) = 0$$

Punkt przecięcia dwuch prostych

$$\left.\begin{array}{l}A_1x+B_1y+C_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2=0\end{array}\right\} \quad x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1} \qquad y=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}$$

jeżeli proste są równoległe to jak przedtem mówiliśmy: $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$ zatem $x=\infty$, $y=\infty$

~~Obszar trójkąta utworzonego przez 3 punkty~~

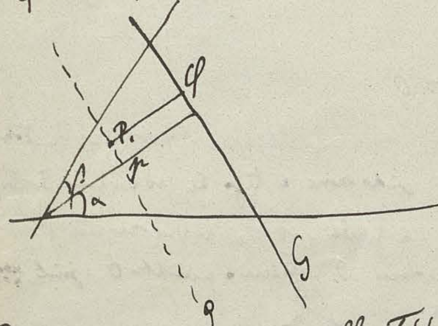


~~$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$~~

Długość prostopadłej z punktu na prostą = odległości

$g: x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$

$g: x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta-p_1=0$



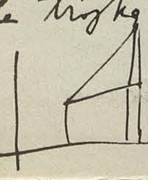
$$P_1\varphi = p-p_1 = p-x_1\cos\alpha-y_1\cos\beta = -(x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta-p)$$

Zatem otrzymuje się odległość punktu od prostej wstawiając wartości współrzędnych punktu w równanie normalnej tej prostej.

Jeżeli więc n.p. $\omega=\frac{\pi}{2}$, $Ax+By+C=0$

$$-\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Pole trójkąta



$$=\frac{1}{2}\left[(y_1+y_3)(x_3-x_1)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(y_1x_3-y_3x_1)+(y_2x_1-y_1x_2)+(y_3x_2-y_2x_3)\right]$$

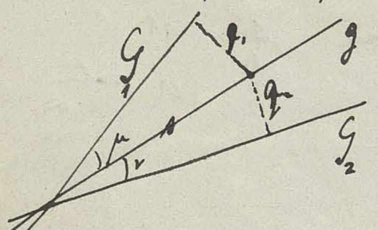
$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

Tak samo i z $\frac{1}{2}hb$

Więc ten warunek żeby 3 punkty leżały na jednej prostej znaczy że $\Delta = 0$.

O wyznacznikach!

Równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia dwuch prostych



$G_1 \qquad x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 - p_1 = 0$

$G_2 \qquad x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 - p_2 = 0$

$\frac{q_1}{s} = \sin\mu$

$\frac{q_2}{s} = \sin\nu$

$\frac{\sin\mu}{\sin\nu} = \frac{q_1}{q_2} = \lambda$ const.

$q_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 - p_1$

$q_2 = x\cos\alpha_2$ ——

$$q_1 = \lambda q_2$$

$$q_1 - \lambda q_2 = 0$$

$$\underbrace{x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 - p_1}_{\equiv \gamma_1} - \lambda\,(\underbrace{x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 - p_2}_{\equiv \gamma_2}) = 0$$

Że to przedstawia prostą to jest widoczne z tego że równanie I stopnia, a jeśli $\gamma=0$ to równoznaczne $\gamma=0$; znak zależy od położenia punktu O: jeśli $x=0$, $y=0$; $p\varphi = \pm p$

$$\gamma_1 - \lambda\gamma_2 = 0$$

λ nazywamy stosunkiem ~~dzielenia~~ podziału; udzielając mu różne wartości otrzymujemy pęk prostych

Jeżeli we formie $A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$

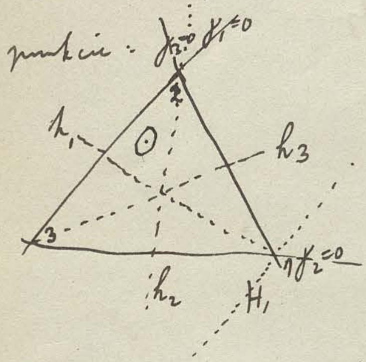
$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \qquad \frac{G_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \lambda\frac{G_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0$$

Jeżeli mamy dwie proste $\gamma_1 - k\gamma_2 = 0$ i $\gamma_1 + k\gamma_2 = 0$ to nazywamy je harmoniczne albo harmonicznie sprzężone

Ten sposób oznaczania równań zapomocą symbolów skracających stosuje się nadzwyczaj praktycznym n.p.:

= dwusieczne kątów

Dowieść że proste dzielące na równe części kąty trójkąta przecinają się w jednym punkcie:



$h_3 \ldots \quad \gamma_1 - \gamma_2 = 0$

$h_1 \ldots \quad \gamma_2 - \gamma_3 = 0$

$\gamma_1 - \gamma_3 = 0$

zatem punkt przecięcia zadość czyni równaniu $\gamma_1 - \gamma_3 = 0$ co jest równaniem h_2

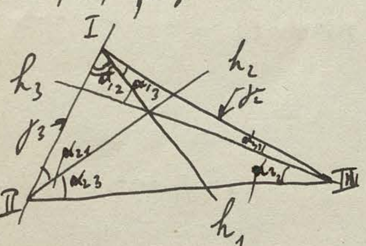
Tak samo i co do kątów zewnętrznych.

$H_1 \ldots \quad \gamma_2 + \gamma_3 = 0$

$H_3 \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 0$

$\gamma_1 - \gamma_3 = 0 \quad \ldots h_2$

Ogólniejszy przykład:



~~sin α1 : sin ...~~

$\sin\alpha_{13} : \sin\alpha_{12} = m_3 : m_2$

$\sin\alpha_{21} : \sin\alpha_{23} = m_1 : m_3$

$\sin\alpha_{32} : \sin\alpha_{31} = m_2 : m_1$

} przecinają się w jednym punkcie

$h_1 \ldots \quad \gamma_2 - \frac{\sin\alpha_{13}}{\sin\alpha_{12}}\gamma_3 = 0 \equiv \gamma_2 - \frac{m_3}{m_2}\gamma_3 = 0 \parallel m_2\gamma_2 - m_3\gamma_3 = 0$

$h_2 \parallel m_3\gamma_3 - m_1\gamma_1 = 0$

$m_2\gamma_2 - m_1\gamma_1 = 0 \equiv h_3$

zatem . . .

~~(Zresztą te 3 warunki nie są dowolne dowolne tylko dwa ... i $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180°$~~

bo $\sin\alpha_{13} : \sin\alpha_{12} = \sin\alpha_3 : \sin\alpha_2$)

[przeszły przykład jeśli $m_1 : m_2 : m_3 = 1:1$

Ogólny rezultat jeśli mamy 3 proste:

$g_1=0$ to przecinają się one w jednym punkcie jeśli, dodaję się średnie

$g_2=0$ 3 czynniki

$g_3=0$

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \equiv 0 \quad \text{(dla każdego } x\, y)$$

bo jeśli g_1 i $g_2=0$ to wtedy i $g_3=0$

Tak samo dla ogólnej formy:

$G_1=0$

$G_2=0$ jeśli $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$

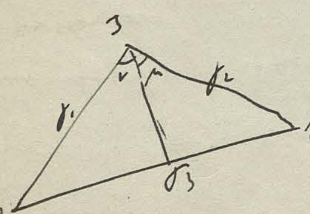
$G_3=0$

N. p.

$$\begin{array}{ll|l} G_1 \ldots & 2x+5y-7=0 & \lambda_1=+1 \\ G_2 \ldots & x-2y+8=0 & \lambda_2=+1 \\ G_3 \ldots & -x+y+\frac{1}{3}=0 & \lambda_3=-3 \end{array}$$

$$x(2+1-3)+y(5-2-3)+(-7+8-1)\equiv 0$$

Podobnie: 3 prostopadłe z kątów na przeciwległe boki przecinają się w 1 punkcie



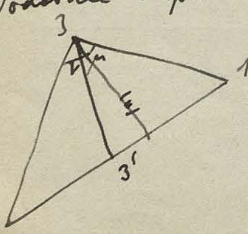
$$\sin\mu : \sin\nu = \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2$$

$$h_3 : g_2 - \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} g_1 = 0 \quad \ldots \quad g_2\cos\alpha_2 - g_1\cos\alpha_1 = 0$$

$$h_1 \quad g_3\cos\alpha_3 - g_2\cos\alpha_2 = 0$$

$$g_3\cos\alpha_3 - g_1\cos\alpha_1 = 0 \quad \ldots\ldots \equiv h_2$$

Podobnie 3 proste dzielące przeciwległe boki na równe części



$$\left.\begin{array}{l} \sin\mu : \sin\alpha_1 = \overline{13'} : \overline{33'} \\ \sin\nu : \sin\alpha_2 = \overline{23'} : \overline{33'} \end{array}\right\} \sin\mu : \sin\nu = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$$

$$\overline{13'} = \overline{23'}$$

zatem $h_3 \ldots\ g_1\sin\alpha_1 - g_2\sin\alpha_2 = 0$

etc.

Jeżeli mamy 3 ogólne równania

$G_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$
$G_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
$G_3 = A_3 x + B_3 y + C_2 = 0$

to ~~nie~~ wyjątk. będziemy mogli określić 3 takie wielkości k_1, k_2, k_3 żeby była spełniona relacja

$$k_1 G_1 + k_2 G_2 + k_3 G_3 = 0$$
(dla wszystkich $x\,y$)

bo to wymagałoby

$A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 = 0$
$B_1 k_1 + B_2 k_2 + B_3 k_3 = 0$
$C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3 = 0$

te nie można rozwiązać według $k_1\, k_2\, k_3$ bo mamy tu 3 równania na stosunek

$\frac{k_1}{k_3}$ i $\frac{k_2}{k_3}$

Takie 3 proste także nie będą się przecinały w 1 punkcie, bo x y wyliczone z dwuch nie będą spełniały 3ej.

Można jednak w tym wypadku wyrazić równanie 4tej prostej G jako sumy $G \equiv k_1 G_1 + k_2 G_2 + k_3 G_3$ (dla wszystkich x, y)

bo wtedy mamy $A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 = A$
B
C

więc mamy doprawdy 3 równania z 3 niewiadomemi k które można wyrachować

Tylko w pewnym wypadku mogą być one 3 równania rozwiązane t.j.

jeżeli ~~$C_1 = A_1 + \lambda B_1$ $C_2 = A_2 + \lambda B_2$ $C_3 = A_3 + \lambda B_3$~~

$A_3 = A_1 + \lambda A_2$ $B_3 = B_1 + \lambda B_2$ $C_3 = C_1 + \lambda C_2$

bo wtedy ~~[illegible]~~ $G_3 \equiv G_1 + \lambda G_2$

~~zatem $k_1 G_1 + k_2 G_2 + k_3 G_3$~~ więc jeżeli się zrobi k_1 dowolne $k_2 = \lambda k_1$
$k_3 = -k_1$

więc będzie

$$\kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3 \equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 (S_1 + \lambda S_2)$$

$$\equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_1 \lambda S_2 - \kappa_1 (S_1 + \lambda S_2)$$

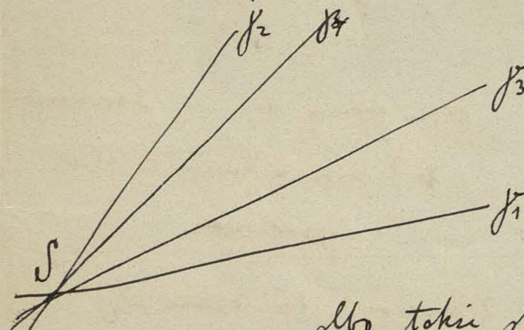
$$\equiv 0$$

a ów warunek $S_3 \equiv S_1 + \lambda S_2$ znaczy właśnie że wtedy owa prosta przechodzi przez punkt przecięcia prostych S_1 i S_2

Wtedy jednak równania czwartej prostej naturalnie nie możemy przedstawić już w formie $S \equiv \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3$

bo chcąc wyznaczyć wartości $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$ zobaczylibyśmy że te wartości nie mogą istnieć.

Przechodzimy teraz do nowego pojęcia



$$g_3 \equiv g_1 - \lambda g_2$$

$$g_4 \equiv g_1 - \mu g_2$$

Doppelverhältnis

stosunek $\frac{\lambda}{\mu}$ nazywamy stosunkiem podwójnego podziału kąta $g_1 g_2$

Albo także sto. p. p. pęku czterech promieni $g_1 g_2 g_3 g_4$

$$= (g_1 g_2 g_3 g_4) = \frac{\sin g_1 \hat{} g_3}{\sin g_3 \hat{} g_2} : \frac{\sin g_1 \hat{} g_4}{\sin g_4 \hat{} g_2}$$

także w innych formach

$$= \frac{\sin g_4 g_2}{\sin g_3 g_2} : \frac{\sin g_1 g_4}{\sin g_1 g_3} = \frac{\sin g_4 g_2}{- \sin g_2 g_3} : \frac{- \sin g_4 g_1}{\sin g_1 g_3} = (g_4 g_3 g_2 g_1) \text{ itd.}$$

Także jeśli proste nie są dane we formie normalnej ale ogólnej:

$G_3 \equiv G_1 - \lambda G_2$

$G_4 \equiv G_1 - \mu G_2$

to stosunek $\frac{\lambda}{\mu}$ oznacza stosunek podwójnego podziału

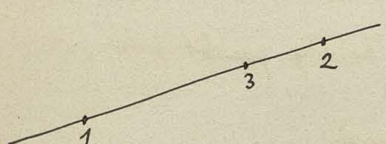
$$= \frac{\sin G_1 G_3}{\sin G_3 G_2} : \frac{\sin G_1 G_4}{\sin G_4 G_2}$$

bo $\lambda = \frac{\sin G_1 G_3}{\sin G_3 G_2} \cdot \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

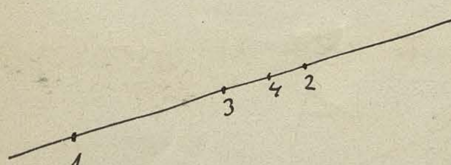
a tak samo: $\mu = \frac{\sin G_1 G_4}{\sin G_4 G_2} \sqrt{\frac{A_1^2+B_1^2}{A_2^2+B_2^2}}$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin G_1 G_3}{\sin G_3 G_2} : \frac{\sin G_1 G_4}{\sin G_4 G_2}$$

Pęki promieni . . . .   szeregi punktów = ~~punkty~~ zbiór punktów leżących na prostej = podstawie



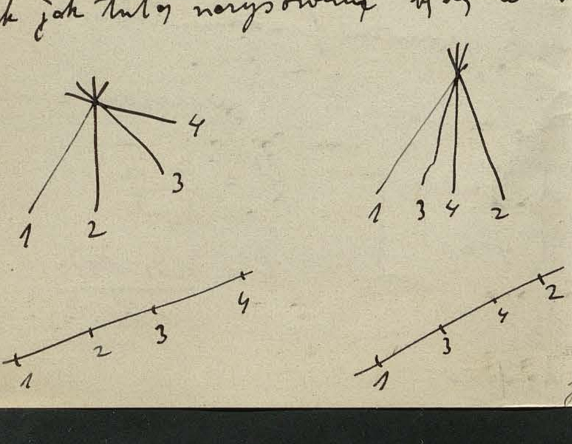
stosunek odległości $\frac{13}{12}$ nazywamy stosunkiem podziału $= \lambda$

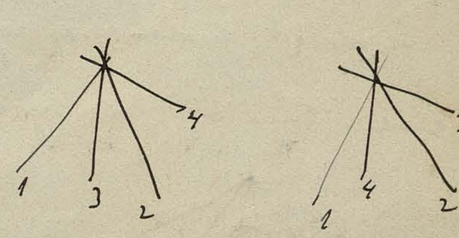


stosunek $\frac{13}{12} : \frac{14}{12} = \frac{\lambda}{\mu}$

nazywamy ~~podw~~ st. p. p.

Tak jak tutaj narysowane będą te st. p. p. +   −

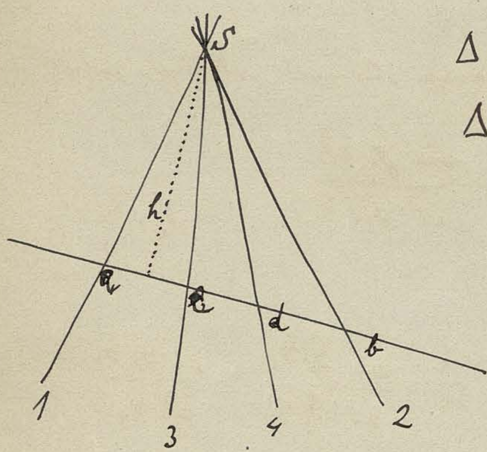




. etc.

jeśli $= -1$ to „podział harmoniczny"

Przetnijmy pęk promieni ~~w~~ jakąś bądź prostą (Pappus)



$$\Delta\, aSd = h\,\overline{ad} = \overline{aS}\;\overline{Sd}\,\sin aSd$$

$$\Delta\, dSb = h\,\overline{db} = \overline{dS}\;\overline{Sb}\,\sin dSb$$

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{db}} = \frac{\overline{aS}}{\overline{Sb}}\;\frac{\sin aSd}{\sin dSb}$$

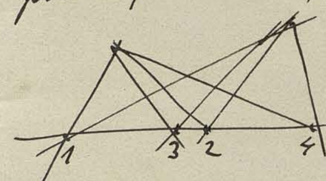
tak samo: $\frac{ac}{cb} = \frac{aS}{Sb}\;\frac{\sin aSc}{\sin cSb}$

więc: $\frac{ad}{db} : \frac{ac}{cb} = \frac{\sin ad}{\sin db} : \frac{\sin ac}{\sin cb}$

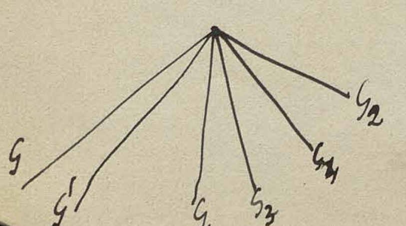
jeżeli przetniemy a [illegible] – poprzeczną
stosunek podz. podw. promieni = st. p. p. punktów przecięcia

więc n. p. jeżeli 4 promienie harmoniczne to każda ~~prosta~~ poprzeczna przecina je w punktach harmonicznie sprzężonych

albo jeżeli mamy 4 harmoniczne punkty to każdy pęk promieni na nich utworzony = harmoniczny



Aż dotąd uważaliśmy równania dwóch promieni fundamentalnych jako dane a inne przez nie wyrażone. Jeżeli zaś wszystkie 4 wyrażone przez 2 inne,



$$G_1 \equiv G - \lambda_1 G' = 0$$
$$G_2 \equiv G - \lambda_2 G' = 0$$
$$G_3 \equiv G - \lambda_3 G' = 0$$
$$G_4 \equiv G - \lambda_4 G' = 0$$

$$G' = \frac{G_1 - G_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$G = \frac{\lambda_2 G_1 - \lambda_1 G_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

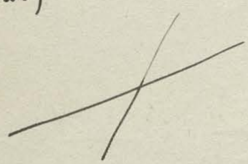
Właściwe pole geometryi prostej są figury utworzone przez proste lub przez punkty i tem zastosowuje się te pojęcia. Ograniczymy się na najprostsze przykłady.

Figury zupełne

N bok zupełny = zbiór n prostych (które będą się przecinały w $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach)

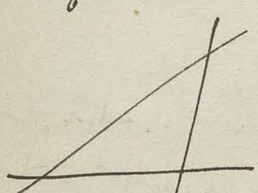
N kąt zupełny = zbiór n punktów (które można połączyć ze sobą przez $\frac{n(n-1)}{2}$ ~~prost~~ przekątnie)

Dwójbok

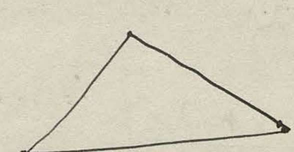


Dwójkąt

Trójbok



Trójkąt

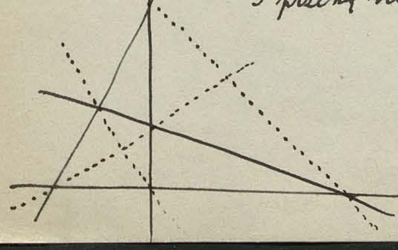


te są takiesame
(inne nie)

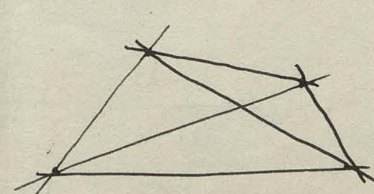
Właściwości tego już poznaliśmy (dowieczne przecinające się w jednym punkcie etc)

Czworobok

3 przekątnie



Czworokąt



$$\mathcal{G}_3 \equiv \frac{\lambda_2 \mathcal{G}_1 - \lambda_1 \mathcal{G}_2 - \lambda_3 \mathcal{G}_1 + \lambda_3 \mathcal{G}_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0$$

$$\mathcal{G}_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}\,\mathcal{G}_2 = 0 \qquad \lambda = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}$$

$\mathcal{G}_1$

$\mathcal{G}_2$

$\mathcal{G}_3 \equiv \mathcal{G}_1 - \lambda \mathcal{G}_2$

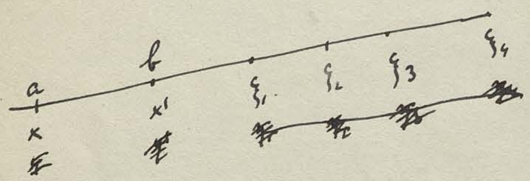
$\mathcal{G}_4 \equiv \mathcal{G}_1 - \mu \mathcal{G}_2$

$$\mathcal{G}_4 \equiv \lambda_2 \mathcal{G}_1 - \lambda_1 \mathcal{G}_2 - \lambda_4 \mathcal{G}_1 + \lambda_4 \mathcal{G}_2 = 0$$

$$\mathcal{G}_1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}\,\mathcal{G}_2 = 0 \quad \Big| \quad \mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

$$(\mathcal{G}_1\, \mathcal{G}_2\, \mathcal{G}_3\, \mathcal{G}_4) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

Tak samo 4 punkty wyrażone przez dwa



$$(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4) = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} : \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2}$$

$$\frac{\xi_1 - x}{\xi_1 - x'} = \lambda_1$$

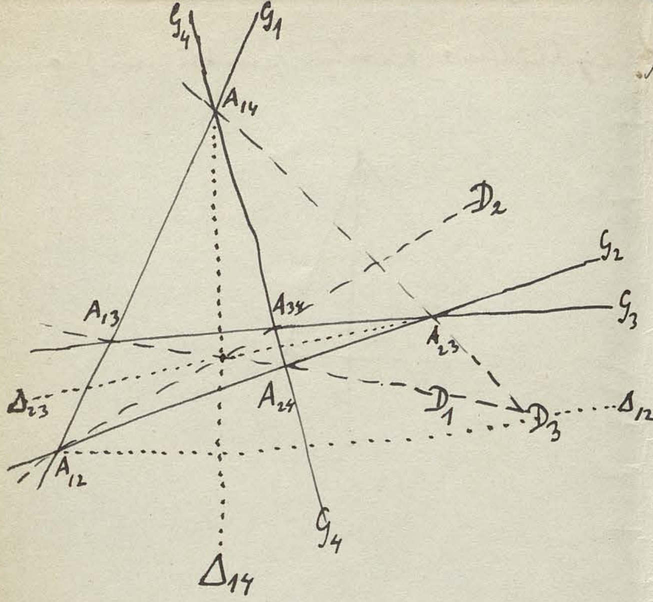
$$\xi_1 = \frac{x - \lambda_1 x'}{1 - \lambda_1}$$

$$\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{\dfrac{x - \lambda_3 x'}{1 - \lambda_3} - \dfrac{x - \lambda_1 x'}{1 - \lambda_1}}{\dfrac{x - \lambda_3 x'}{1 - \lambda_3} - \dfrac{x - \lambda_2 x'}{1 - \lambda_2}} = \frac{x - \lambda_3 x' - \lambda_1 x + \lambda_1 \lambda_3 x' - x + \lambda_1 x' + \lambda_3 x - \lambda_1 \lambda_3 x'}{\dots} \cdot \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}$$

$$\frac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2}\;\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1} \quad \Big\| \quad \frac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2} = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}\;\frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1}$$

Zatem: $(\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4) = \dfrac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} : \dfrac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2}$

Jeżeli n.p. harmoniczny podział to: $\dfrac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} + \dfrac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_2} = 0$ więc %.



Najważniejsze własności:

W każdym wierzchołku mamy parę promieni harmonicznych, którą ~~utworzonych przez~~ przekątnią i ~~prostą~~ łącznicą wierzchołka z punktem przecięcia dwuch przekątnych pozostałych tworzą z dwoma bokami przechodzącemi przez wierzchołek.

N.p. $(G_1 \; G_4 \; \Delta_{14} \; D_3) = -1$

$$D_2 \equiv G_1 m_1 + G_2 m_2 \equiv G_4 m_4 + G_3 m_3$$

$$G_1 m_1 - G_4 m_4 \equiv G_3 m_3 - G_2 m_2 \equiv D_3$$

$$G_1 m_1 - G_3 m_3 \equiv G_4 m_4 - G_2 m_2 \equiv D_1$$

$$D_1 + D_2 \equiv G_1 m_1 + G_4 m_4 \equiv \Delta_{14}$$

$$D_1 + D_3 \equiv G_1 m_1 - G_2 m_2 \equiv \Delta_{12}$$

$$D_2 + D_3 \equiv G_1 m_1 + G_3 m_3 \equiv \Delta_{13}$$

$$D_1 - D_2 \equiv - G_2 m_2 - G_3 m_3 \equiv \Delta_{23}$$

$$D_1 - D_3 \equiv G_4 m_4 - G_3 m_3 \equiv \Delta_{34}$$

$$D_2 - D_3 \equiv G_4 m_4 + G_2 m_2 \equiv \Delta_{24}$$

Więc n.p.

~~$D_1 \quad D_2 \quad D_1 + D_2$~~

G_1

G_2

$D_3 \equiv G_1 m_1 - G_4 m_4$

$\Delta_{14} = G_1 m_1 + G_4 m_4$

Tak samo 2 przekątnie z prostemi łączącemi punkt przecięcia ich z wierzchołkami pozostałemi

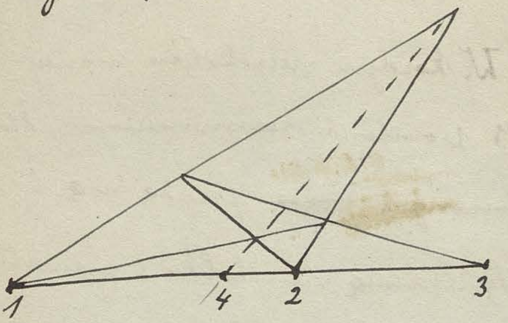
$(D_1 \; D_2 \; \Delta_{14} \; \Delta_{23}) = -1$

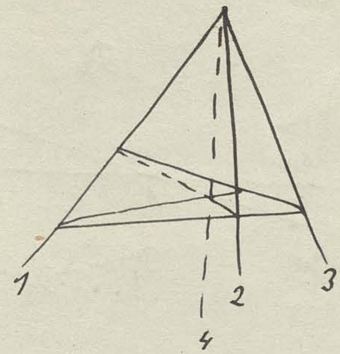
$D_1 \;,\; D_2$

$D_1 + D_2 \;,\; D_1 - D_2$

Także z figury

Z tego znajduje się następujący sposób wykreślenia czwartego punktu (prom.) harm.



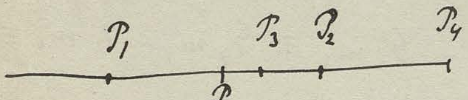


$14 : 42 = -(13 : 32)$

$= 13 : 23$

Przejdziemy do nowego pojęcia: inwolucyi par punktów lub promieni

Mamy ~~cztery~~ 4 punkty harmoniczne



więc $\frac{P_3P_2}{P_1P_3} = -\frac{P_4P_2}{P_1P_4}$

Teraz obierzemy punkt P tak że $P_1P = PP_2 = d$

$P P_3 \equiv d_3$

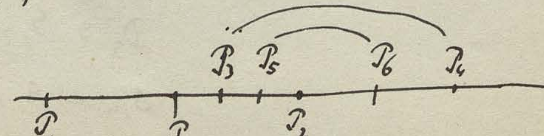
$P P_4 \equiv d_4$

$$\frac{P_3P_2}{P_1P_3} = \frac{d-d_3}{d+d_3} = +\frac{d_4-d}{d+d_4}$$

$$d^2 - dd_3 + dd_4 - d_3d_4 = dd_4 - d^2 + d_3d_4 - dd_3$$

$$d^2 = d_3d_4$$

Jeśli teraz obierzemy jeszcze inne pary punktów P_5 i P_6 etc harmoniczne do tych samych P_1 P_2 to będzie

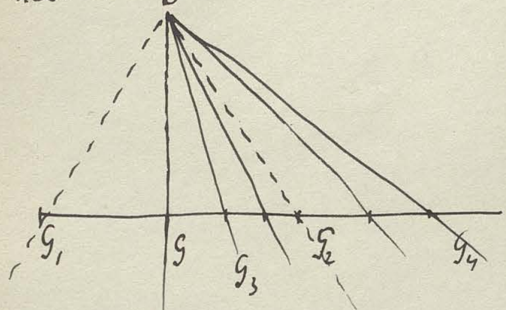


$$d^2 = d_3d_4 = d_5d_6 = \cdots$$

nazywamy to inwolucyą: pary punktów P_3P_4, P_5P_6 etc tworzą inwolucyę i tamto

równanie służy do określenia tego pojęcia. Środek inwolucji, punkty asymptotyczne

Wykreślimy teraz pęk promieni nad temi punktami, tak że wierzchołek S nad P.



dzieląc tamto równanie przez $(GS)^2$ otrzymamy

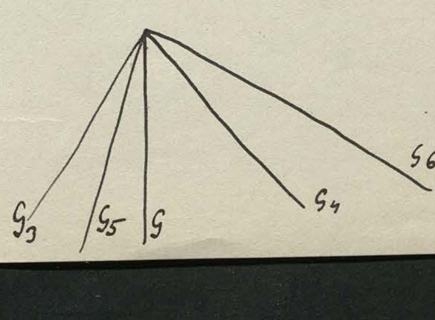
$$(\operatorname{tg} GG_1)^2 = (\operatorname{tg} GG_2)^2 = \operatorname{tg} GG_3 \operatorname{tg} GG_4 = \operatorname{tg} GG_5 \operatorname{tg} GG_6 = \lambda^2$$

Jeżeli takie równanie zachodzi między parami promieni to mówimy że tworzą one inwolucję; G = oś inwolucji, G_1 i G_2 asymptotyczne.

~~Jeżeli mamy więc~~ Więc: promienie należące do jednej pary (inwolucyjnego pęku) są ze sobą harmonicznie sprzężone względem promieni asymptotycznych.

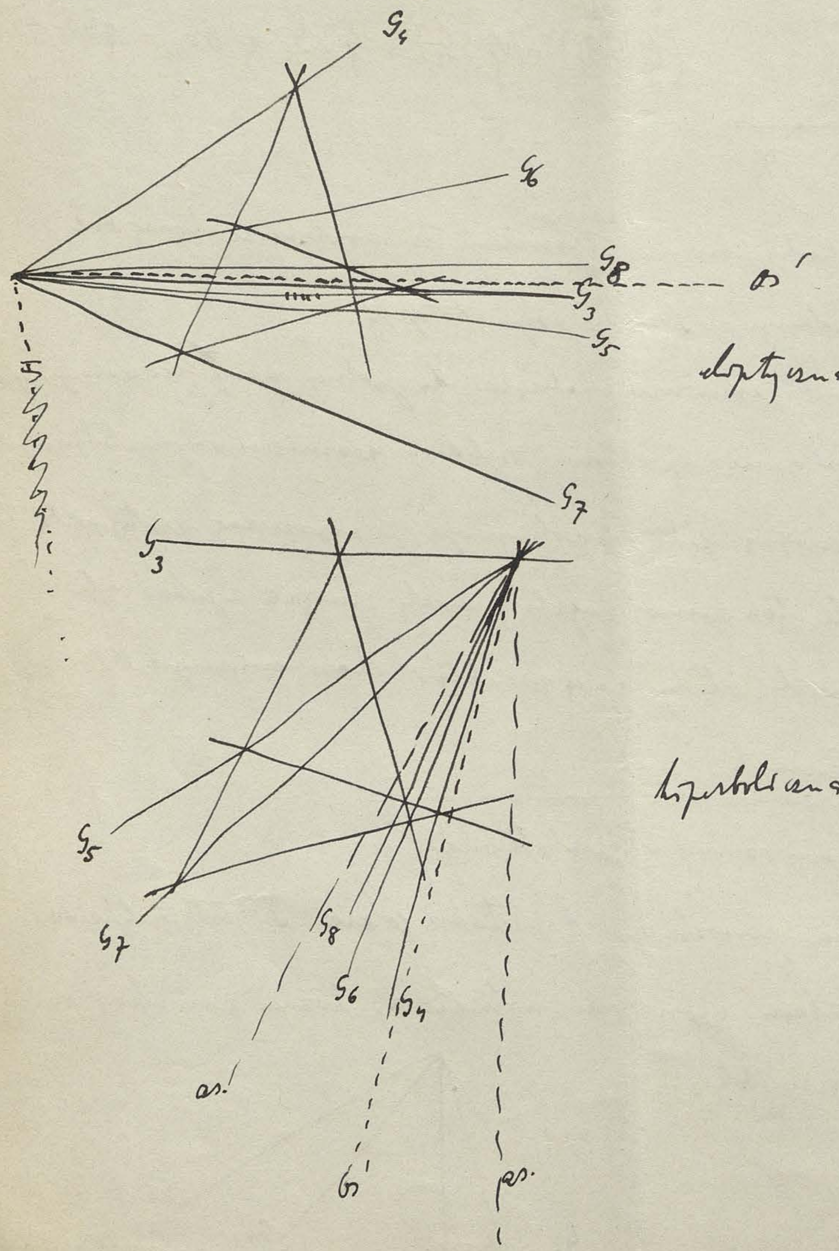
Mamy także punkty przecięcia pęku inwolucyjnego z poprzeczną prostopadłą do osi tworzą inwolucję, ale tak samo w ogóle punkty przecięcia z jakąkolwiek poprzeczną, bo będziemy mieli wtedy pary punktów harmonicznych do dwuch punktów asymptotycznych.

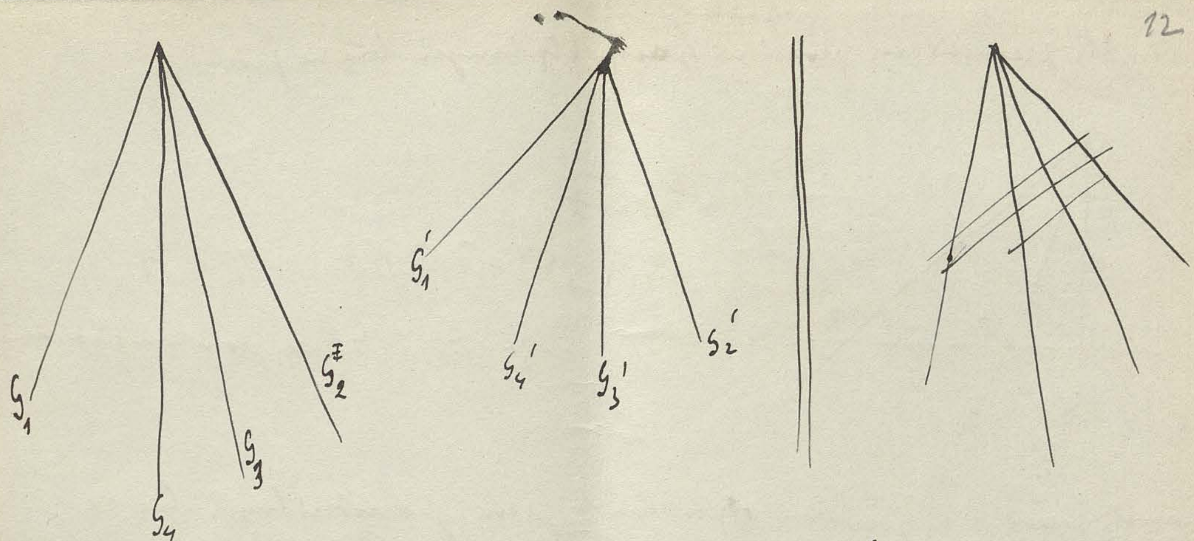
Tego rodzaju inwolucje nazywamy hiperboliczne. Egzystują także eliptyczne inwolucje t.j. takie gdzie λ^2 jest wielkością ujemną (zatem λ urojone), tam promienie należące do każdej pary leżą z obu stron osi; tak samo punkty:



W dalsze szczegóły nie możemy się teraz wdawać. Jako przykład przytaczamy tylko bez dowodu:

Pary promieni wychodzących z jakiegóbądź punktu do ~~ot~~ przeciwległych wierzchołków czworoboku tworzą inwolucyę.





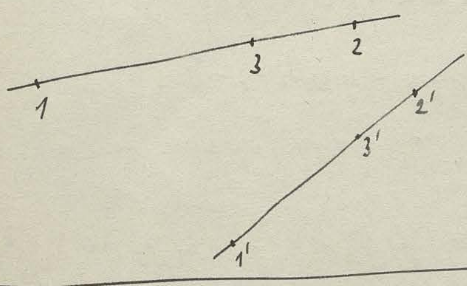
Jeżeli $g_3 = g_1 - \lambda g_2$ $\quad g_3' = g_1' - \lambda g_2'$

Toksamo $g_4 = g_1 - \mu g_2$ $\quad g_3' = g_1' - \mu g_2'$ etc.

to nazywamy te pęki jednokreślnemi (projectivisch)

a $g_3 \ldots g_3'$, $g_4 \ldots g_4'$ promieniami odpowiednimi

Toksamo punkty

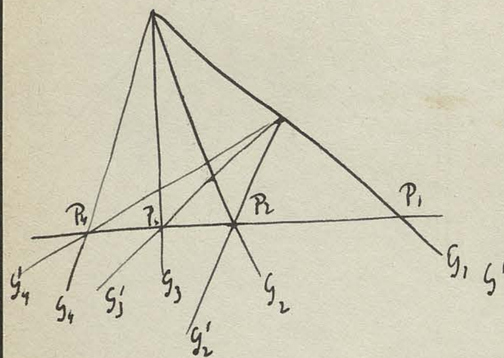


$\frac{12}{32} = \lambda \qquad \frac{12'}{32'} = \lambda$

szeregi jednokreślne

Jeżeli pęk S' tak obrócimy że g_1' równoległe z g_1 i zarazem tak przesuniemy że S' wpadnie w g_1 to nazywamy takie pęki perspektywiczne więc każdy promień łączący dwa wierzchołki jest odpowiedni samemu sobie.

Punkty przecięcia się promieni ~~perspektywicznych~~ odpowiednich leżą na prostej



$$(S_1 S_2 S_3 S_4) = (P_1 P_2 P_3 P_4) = (S_1' S_2' S_3' S_4')$$

więc S_4 i S_4' są promieniami odpowiedniemi

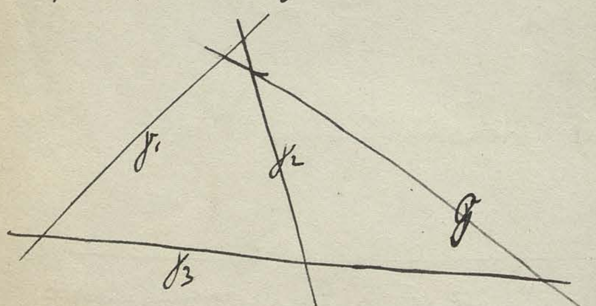
Punkty przecięcia się promieni odpowiednich pęków jednokreślnych leżą na krzywej 2go ~~stopnia~~ rzędu (przechodzącej przez wierzchołki):

$$S_1 - \lambda S_2^* = 0 \quad \Big| \quad S_1' - \lambda S_2' = 0$$

$$S_1 S_2' - S_2 S_1' = 0$$ = równanie drugiego stopnia w x, y

---

Współrzędne trójkątne



Trójkąt odniesienia

(Fundamentaldreieck)

$$g_1 \equiv x \cos\alpha_1 + y \cos\beta_1 - p_1 = 0$$

$$g_2 \equiv x \cos\alpha_2 + y \cos\beta_2 - p_2 = 0$$

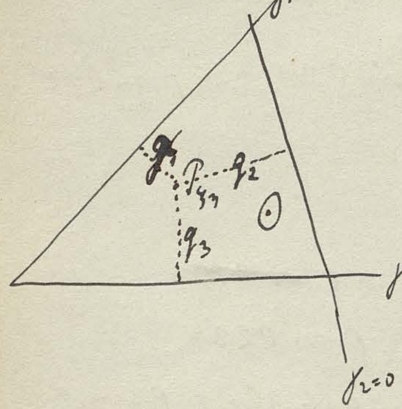
$$g_3 \equiv x \cos\alpha_3 + y \cos\beta_3 - p_3 = 0$$

$$g \equiv k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3 = 0$$

$k_1\ k_2\ k_3$ ~~możemy uważać jako~~ oznaczają położenie prostej, a $g_1\ g_2\ g_3$ są wielkościami zmiennemi złożonemi ze x y etc., możemy je uważać jako współrzędne

Jeżeli wstawimy pewne wartości x, y w tem równaniu, to otrzymamy

pewien punkt oznaczony przez γ_1 γ_2 γ_3, te wielkości przedstawiają wtedy odległości punktu od trzech boków trójkąta (z ujemnym znakiem)



$$(\gamma_1)_{\xi\eta} = -\varrho_1$$

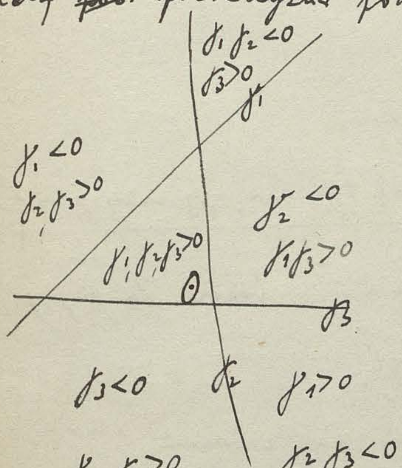
$$(\gamma_2)_{\xi\eta} = -\varrho_2$$

$$(\gamma_3)_{\xi\eta} = -\varrho_3$$

i równanie prostej wyraża stosunek między temi odległościami.

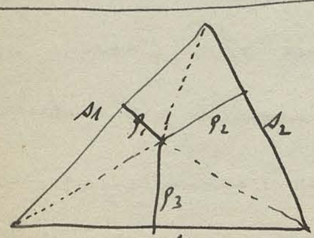
Nazywamy γ_1 γ_2 γ_3 współrzędnemi trójkątnemi (prostopadłemi) punktu.

Cała ~~pow~~ płaszczyzna podzielona na 7 pól:



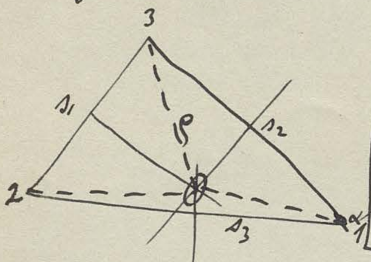
Można się na tę samą rzecz zapatrywać także ze stanowiska czysto algebraicznego t.j. używamy substytucyi $x\cos\alpha + \dots = \gamma$ etc. tak samo jak moglibyśmy zastosować $x^2+y^2=u$, $x^2-y^2=v$ etc.

Wydaje się to dziwnem że do określenia położenia punktu potrzebujemy 3 wielkości zamiast dwuch jak dawniej, ale nie są one ~~jednak~~ też ~~tylko~~ niezależne od siebie, zawsze między niemi istnieć musi następujący warunek.



$$s_1\varrho_1 + s_2\varrho_2 + s_3\varrho_3 = 2\Delta = -(s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + s_3\gamma_3)$$

Na uwagę zasługuje szczególne położenie punktu P = środek koła opisanego na trójkącie



$$2\Delta = s_1 \rho \sin 023 + s_2 \rho \sin 031 + s_3 \rho \sin 012$$

$$\frac{2\Delta}{\rho} = s_2 \cos 1 + \ldots$$

wtedy: $\sphericalangle 213 = \frac{1}{2} \sphericalangle 203 = \sphericalangle 20s_1$

$\frac{s_1}{2} =$ [illegible]

$\rho \cos 023 =$
$= \rho \sin 20s_1 = \rho \sin \alpha_1$

$$\frac{s_1}{\rho} = 2 \sin \alpha_1$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{s_1} = \frac{\sin \alpha_2}{s_2} = \frac{\sin \alpha_3}{s_3} = \frac{1}{2\rho}$$

$$s_1 = \frac{2 \sin \alpha_1}{\rho} \qquad s_2 = \frac{2 \sin \alpha_2}{\rho} \qquad s_3 = \frac{2 \sin \alpha_3}{\rho}$$

Zatem owe równanie także w formie: $p_1 \sin \alpha_1 + p_2 \sin \alpha_2 + p_3 \sin \alpha_3 = -\frac{\Delta}{\rho}$

Jeżeli dane współrzędne punktu P $(x\,y)$ i równania wszystkich boków to $p_1\, p_2\, p_3$ otrzymuje się wprost przez wstawienie do nich.

Odwrotnie jeżeli dane $p_1\, p_2\, p_3$ to znajduje się $x\, y$ z równań $x \cos \alpha - y$. itd.

Zdaje się jak gdybyśmy byli zanadto prostą rzecz skomplikowali, ale przecież te współrzędne przedstawiają niektóre korzyści, mianowicie jednorodność do tego praktyczne w zadaniach gdzie trójkąt jest dany przez warunki zadania,

Wróćmy jeszcze do równania prostej w tej formie

$\gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_3 \kappa_3 = 0$ i jakie są n. p. współrzędne punktów przecięcia z –

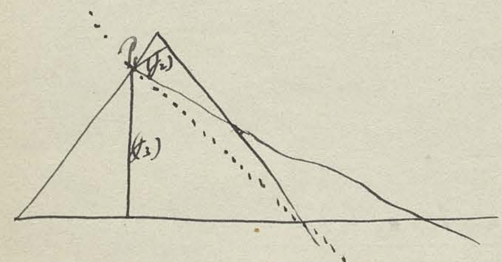
~~co za znaczenie mają $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$?~~

Punkt przecięcia z γ_1 ma $\gamma_1 = 0$ zatem dwie inne współrzędne: $(\gamma_2)\kappa_2 + (\gamma_3)\kappa_3 = 0$

do tego $(\gamma_2) s_2 + (\gamma_3) s_3 = 2\Delta$

~~zatem $\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_2}$~~

$$P_1 \begin{cases} (\gamma_3) = \dfrac{2\kappa_2 \Delta}{\kappa_3 s_2 - \kappa_2 s_3} \\ (\gamma_2) = \dfrac{2\kappa_3 \Delta}{\kappa_2 s_3 - \kappa_3 s_2} \end{cases}$$



$$\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{(\gamma_3)}{(\gamma_2)}$$

i podobnie P_2 i P_3

Równanie $\gamma_2 \kappa_2 + \gamma_3 \kappa_3 = 0$ gdzie teraz $\gamma_2 \gamma_3$ zmienne przedstawia prostą $P_1 A_1$, jak z tego widać że przechodzi przez punkt przecięcia się γ_2, γ_3 $(= A_1)$ a także przez P_1 bo można napisać $= \kappa_1\gamma_1 - (\kappa_2\gamma_2 + \kappa_3\gamma_3)$. Oczywiście też wszystkie jej punkty zadość czynią równaniu $\frac{\kappa_2}{\kappa_3} = -\frac{(\gamma_3)}{(\gamma_2)}$

Wyznaczyć kąt między dwiema prostemi danemi $G \equiv a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3$

$G' \equiv b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3$

$$\gamma \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p$$
$$\gamma' \equiv x\cos\beta + y\sin\beta - p'$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta}$$

$$G \equiv Ax + By + C = 0$$
$$G' \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

$$\gamma \equiv \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{\ }} = 0$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{BA' - B'A}{AA' + BB'}$$

$A = a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3$ | $B = a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 +$

$A' = b_1 \cos\alpha_1 + b_2 \cos\alpha_2 + b_3 \cos\alpha_3$ | $B' = b_1 \sin\alpha_1 + b_2 \sin\alpha_2$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{(a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 \quad)(b_1\sin\alpha_1 + \cdots \quad) - (b_1\cos\alpha_1 \cdots \quad)(a_1\sin\alpha_1 + - \quad)}{(a_1\cos\alpha_1 + - \quad)(b_1\cos\alpha_1 + - \quad) + (a_1\sin\alpha_1 \quad)(b_1\sin\alpha_1 + \quad)}$$

$$= a_1 b_2(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) + a_2 b_1(\cos\alpha_2\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2) +$$

$$+ a_2 b_3(\cos\alpha_2\sin\alpha_3 - \cos\alpha_3\sin\alpha_2) + a_3 b_2(\cos\alpha_3 -$$

$$+ a_3 b_1(\quad - \quad\quad -$$

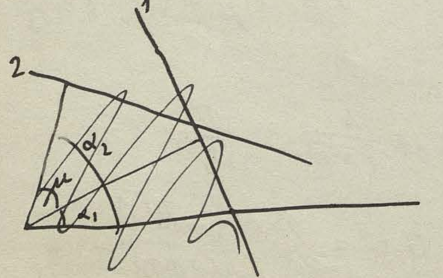
$$= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_2\sin\alpha_1) + (a_3 b_2 - a_2 b_3)(\cdot \quad - \quad + (\quad)}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_2 b_1(\cos\alpha_2\cos\alpha_1 + \sin\alpha_2\sin\alpha_1) + a_1 b_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2)}$$

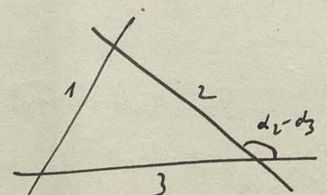
$$+ \cdot — \qquad\qquad + - —$$

$$+ - \qquad\qquad + -$$

$$= -\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + (a_3 b_2 - a_2 b_3)\sin(\alpha_2 - \alpha_3) + -}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + a_3 b_2 \cos(\alpha_3 - \alpha_2) + -}$$

$$= \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)\sin A_3 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos A_3 - \cdots}$$





Zatem warunek $g \perp g'$:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cos A_3 - (a_2 b_3 + a_3 b_2)\cos A_1 - (\qquad) = 0$$

$g \parallel g'$:
$$\begin{vmatrix} \sin A_1 & \sin A_2 & \sin A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Jeśli 3 punkty leżą na prostej $P\begin{cases}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{cases}$ $P'\{\quad$ $P''\{\quad$

$$\left.\begin{aligned} a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 &= 0 \\ a_1\gamma_1' + a_2\gamma_2' + a_3\gamma_3' &= 0 \\ a_1\gamma_1'' + a_2\gamma_2'' + a_3\gamma_3'' &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\gamma_3' \\ -\gamma_3\end{matrix}$$

$$a_1(\gamma_1\gamma_3' - \gamma_1'\gamma_3) + a_2(\gamma_2\gamma_3' - \gamma_2'\gamma_3) = 0$$
$$a_2(\gamma_2\gamma_1' - \gamma_2'\gamma_1) + a_3(\gamma_3\gamma_1' \qquad) = 0$$
$$a_3(\gamma_3\gamma_2' \qquad) + a_1(\qquad)$$

$$\frac{a_1}{\gamma_2\gamma_3' - \gamma_2'\gamma_3} = \frac{a_2}{\gamma_3\gamma_1' - \gamma_3'\gamma_1} = \frac{a_3}{\gamma_1\gamma_2' - \gamma_1'\gamma_2} = c$$

$$\gamma_1(\gamma_2\gamma_3' - \gamma_2'\gamma_3) + \gamma_2(\qquad) + \gamma_3(\qquad) = 0$$

Więc warunek żeby 3 punkty leżały na prostej:
$$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' \\ \gamma_1'' & \gamma_2'' & \gamma_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Jeśli $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ uważa się jako współrzędne punktu zmiennego to wyrażenie owo ~~[illegible]~~ jest równanie prostej przechodzącej przez P', P''

Uogólnienie tych współrzędnych:
Wszystkie równania ~~pozostają~~ jednorodne pozostają niezmienione jeśli pomnożymy je przez dowolne stałe, zatem możemy także $\rho\gamma_1$, $\rho\gamma_2$, $\rho\gamma_3$ uważać jako

spółrzędne i aby je odróżnić od tamtych nazwiemy je x_1 x_2 x_3

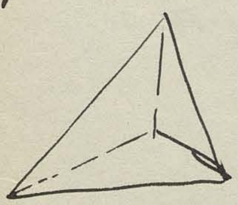
$$x_1 = \rho y_1 \qquad x_2 = \rho y_2 \qquad x_3 = \rho y_3$$

jeżeli dane nam jest $x_1 x_2 x_3$ to przez to i $y_1 y_2 y_3$ są dane bo mamy

równanie $\quad y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 = 2\Delta$

więc $\quad x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 = \frac{2\Delta}{\rho}\rho$

Położenie punktu właściwie nie zależy od ich absolutnych bezwzględnych wartości tylko od stosunku tych trzech wielkości, co i ze znaczenia geometrycznego wypada:



jeżeli nie są dane długości y_1 y_2 y_3 tylko wielkości proporcyonalne, to zawsze stosunek $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$ etc. tak że można wykreślić trzy proste $y_1 - \frac{x_1}{x_2} y_2 = 0$ etc. na których przecięciu punkt leży.

Warunek żeby 3 punkty leżały na prostej jest zawsze ten sam:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0$$

Jak łatwo czasem można rachować pokazuje następujący przykład:

Znaleźć spółrzędne punktów: środka mas trójkąta, punktu przecięcia trzech wysokości, środka koła opisanego.

co do pierwszego mieliśmy już równania: $y_1 \sin\alpha_1 - y_2 \sin\alpha_2 = 0$

$$y_2 \sin\alpha_2 - y_3 \sin\alpha_3 = 0 \quad \text{etc.}$$

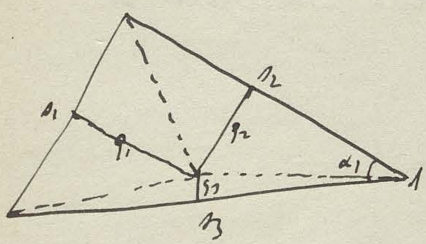
więc: $\quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$ więc $\quad y_1 : y_2 : y_3 = \frac{1}{\sin\alpha_1} : \frac{1}{\sin\alpha_2} : \frac{1}{\sin\alpha_3}$

więc $x_1 = \frac{1}{\sin\alpha_1}$, $x_2 = \frac{1}{\sin\alpha_2}$, $x_3 = \frac{1}{\sin\alpha_3}$ $\Big\}$ M

Tak samo co do trzech wysokości:

$x_1' = \frac{1}{\cos\alpha_1}$ $x_2' = \frac{1}{\cos\alpha_2}$ $x_3' = \frac{1}{\cos\alpha_3}$ $\Big\}$ W

a co do środka koła opisanego:



$\rho_1 = \rho \cos\alpha_1$

$\rho_2 = \rho \cos\alpha_2$

$\rho_3 = \rho \cos\alpha_3$

zatem $x_1'' = \cos\alpha_1$, $x_2'' = \cos\alpha_2$, $x_3'' = \cos\alpha_3$ $\Big\}$ K

Teraz można dowieść że one leżą na jednej prostej:

Zamiast $x_1\ x_2\ x_3$ można także napisać:

$x_1 = \sin\alpha_2 \sin\alpha_3$ $x_2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_3$ $x_3 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$

$x_1' = \cos\alpha_2 \cos\alpha_3$ $x_2' = \cos\alpha_1 \cos\alpha_3$ $x_3' = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2$

$x_1'' = \cos\alpha_1$ $x_2'' = \cos\alpha_2$ $x_3'' = \cos\alpha_3$

Warunek jest:

~~$x_1''(x_2'x_3 - x_3'x_2) + x_2''(x_3'x_1 - x_1'x_3) + x_3''(x_1'x_2 - x_2'x_1) = 0$~~

~~$\cos\alpha_1\cos\alpha_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_1\sin\alpha_3 = \sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin(\alpha_2-\alpha_3)$~~

$x_1(x_2'x_3'' - x_3'x_2'') + x_2(\ldots$

$\cos\alpha_1\cos^2\alpha_3 - \cos\alpha_1\cos^2\alpha_2$

$\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos\alpha_1 (\cos\alpha_3^2 - \cos\alpha_2^2) +$
$\sin\alpha_3 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 (\cos\alpha_1^2 - \cos\alpha_3^2) +$
$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 (\cos\alpha_2^2 - \cos\alpha_1^2)$ $=$

$\cos\alpha_3^2 [\sin\alpha_3 (\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \cos\alpha_1^2 \sin\alpha_1 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \cos\alpha_2^2 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)$

Także i wszystkie nasze spółrzędne prostokątne można uważać jako takie ogólne spółrzędne trójkątne.

Np. $Ax + By + C = 0$ można napisać w formie

$$\underbrace{Ax}_{\gamma_1} + \underbrace{By}_{\gamma_2} + [\underbrace{0.x + 0.y}_{\gamma_3} + C] = 0$$

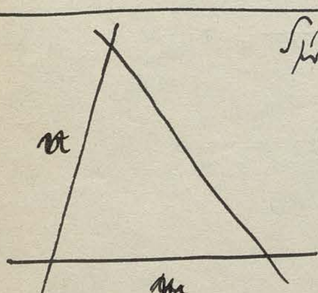
γ_1 = oś X, γ_2 = oś Y, γ_3 = prosta w nieskończoności

Zatem tutaj trójkąt odniesienia =

Można także sprowadzić ove równania w formę jednorodną ~~dzięki~~

kładąc $x = \frac{x_1}{x_3}$ $y = \frac{x_2}{x_3}$

$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$



Spółrzędne linii.

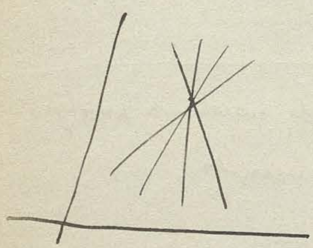
Tak samo jak uważaliśmy punkt jako element, dany przez 2 spółrzędne tak samo można i należy ~~linię~~ prostą jako daną przez 2 wielkości które można nazwać spółrzędnemi jej

Plückerowe spółrzędne

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$

$-\frac{1}{m}=u \quad -\frac{1}{n}=v$

$xu+yv=1$ to ~~nie~~ wyraża że punkt leży na linii, ~~tylko~~ że można uważać albo współrzędne punktu jako zmienne wielkości = równanie prostej albo x, y jako dane i $u\ v$ jako zmienne = równanie punktu

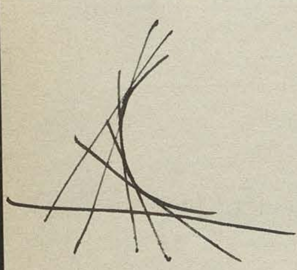


$u=0, \quad v=v_0$ prosta $\parallel X$ etc.

W ogóle jeśli będziemy mieli związek między $x\ y$

$f(x,y)=0$ to przedstawia to ~~miejsce~~ geometryczne wszystkich punktów które równocześnie spełniają to równanie = linia krzywa

$F(u,v)=0$ = miejsce geometryczne wszystkich prostych równocześnie (taka której każda część zadość czyni równaniom prostych jakieś z) spełniające czyli to równanie = krzywa styczna z owemi prostemi



Korzyść polega na zasadzie dwoistości (Dualität)

Ogólne równanie punktu: $Au+Bv+C=0$

$\frac{A}{C}=x \quad \frac{B}{C}=y$

nj.

$g_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$g_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$x = \dfrac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$

$y =$

$P_1 =$ ~~$A_1 \ldots$~~

$= a_1u + b_1v + c_1$

$P_2 = a_2u + b_2v + c_2$

Współrzędne łącznicy:

$u = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{- \; -}$

$v =$

Równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty

$P_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases}$ $P_2 \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}$

$Ax + By + C = 0$

$Ax_1 + By_1 + C = 0$

$Ax_2 + By_2 + C = 0$

$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$

$A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) = 0$

$y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

Równanie punktu leżącego na dwuch prostych = punktu przecięcia

$g_1 \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases}$ $g_2 \begin{cases} u_2 \\ v_2 \end{cases}$

$au_1 + bv_1 + c = 0$

$au + bv + c = 0$

$au_2 + bv_2 + c = 0$

$v - v_1 = \dfrac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}(u - u_1)$

Długość prostopadłej z punktu na prostą jakiej

Dane równanie prostej i współrzędne punktu

$ux + vy + 1 = 0$

$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ Forma norm. $-\dfrac{ux + vy + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0$

$q = \dfrac{\frac{A}{C}x_1 + \frac{B}{C}y_1 + 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

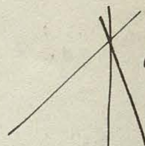
Dane współrzędne prostej i równanie punktu $P_\equiv$

$u\frac{a}{c} + v\frac{b}{c} + 1 = 0$

$q = \dfrac{u\frac{a}{c} + v\frac{b}{c} + 1}{\sqrt{(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2}}$

3 proste przecinają się w jednym punkcie

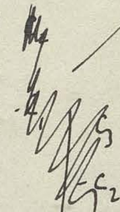
jeżeli



$g_1 \; - \; A_1x+B_1y+C_1=0$

$g_2 \quad A_2x+B_2y+C_2=0$

$g_3 \quad A_3x+B_3y+C_3=0$



~~$(A_1C_2-A_2C_1)x+(B_1C_2-B_2C_1)y=0$~~

$k_1g_1+k_2g_2+k_3g_3=0$

$k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3=0$

$k_1B_1 \qquad =0$

$k_1C_1 \qquad =0$

$\frac{k_1}{k_3}(A_1B_2-A_2B_1)=A_3B_2-B_3A_2$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=0$$

zatem to jest równanie punktu przecięcia jeżeli dane współrzędne 3 prostych

~~jeżeli a … A~~

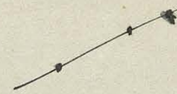
~~$\begin{vmatrix} u & v & 1 \\ \frac{B_1}{C_1} & \frac{B_2}{C_2} & 1 \\ \frac{C_1}{C_3} & C & \end{vmatrix}$~~

$$\begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & \frac{A_2}{C_2} & u \\ \frac{B_1}{C_1} & \frac{B_2}{C_2} & v \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Więc równanie prostej przez punkt przecięcia (g_1, g_2)

$g_3 \equiv -\frac{k_1}{k_3}g_1 - \frac{k_2}{k_3}g_2 \; \| \; g_1+\lambda g_2$

3 punkty leżą na jednej prostej



$P_1 = a_1u+b_1v+c_1=0$

$P_2 =$

$P_3 =$

$k_1P_1+k_2P_2+k_3P_3=0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

równanie prostej przechodzącej przez 3 punkty o danych współrzędnych

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{a_2}{c_2} & x \\ \frac{b_1}{c_1} & \frac{b_2}{c_2} & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

równanie punktu na prostej przez (P_1, P_2)

$P_3 = P_1 - \lambda P_2$

λ = stosunek podziału sinusów kątów

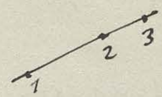
λ = stosunek podziału długości
bo:

$$P_3 = a_3 u + b_3 v + c_3 = 0$$

$$\frac{a_3}{c_3} = x_3 = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$

$$x_3 + x_3 \lambda = x_1 + \lambda x_2$$

$$x_3 - x_1 = \lambda (x_3 - x_2)$$

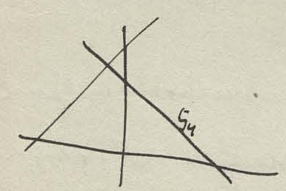


$$\lambda = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

Jeżeli dane 3 proste nie przecinają się w jednym [punkcie] to czwarta prosta

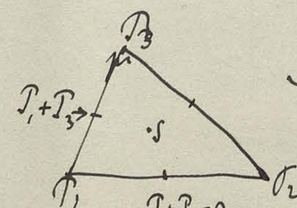
dane 3 punkty nie na prostej leżące
4 punkt

$$S_4 = \kappa_1 S_1 + \kappa_2 S_2 + \kappa_3 S_3$$



$$P_4 = \kappa_1 P_1 + \kappa_2 P_2 + \kappa_3 P_3$$

n.p. środek masy:



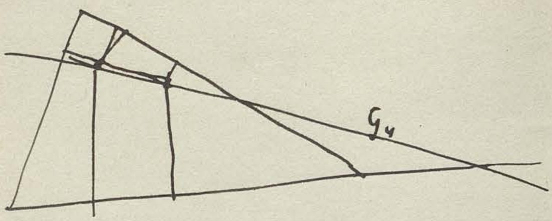
$$S \equiv P_1 + P_2 + P_3 = 0$$

bo to jest równanie punktu leżącego na ~~boku~~ łącznej $P_1 + P_2$ do P_3

$P_1 + P_3$ P_2

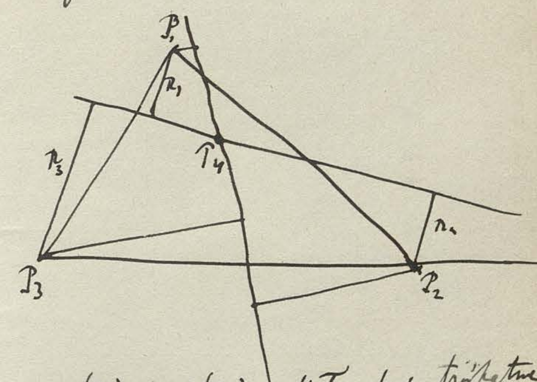
$P_2 + P_3$ P_1

Jeżeli dane 3 proste ρ_1, ρ_2, ρ_3, to równanie czwartej prostej $\rho_4 = \kappa_1\rho_1 + \kappa_2\rho_2 + \kappa_3\rho_3$ wyraża że długości prostopadłe z jakiegokolwiek punktu prostej są w tym stosunku



$(\rho_1)(\kappa_2)(\kappa_3)$ = współrzędne trójkątne punktu

Jeżeli dane 3 punkty $P_1\ P_2\ P_3$ ($\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$) to równanie czwartego punktu $P_4 = \ldots$ wyraża że długości prostopadłe z kątów na jakąkolwiek prostą przechodzącą przez 4 są w tym stosunku



$(\pi_1)\ (\pi_2)\ (\pi_3)$ współrzędne trójkątne prostej

Poznaliśmy już pojęcia krzywych rzędu n-go i klasy n-tej

$$f(x,y)=0 \qquad\qquad F(u,v)=0$$

albo używając spółrzędnych jednorodnych $f(x_1,x_2,x_3)=0$

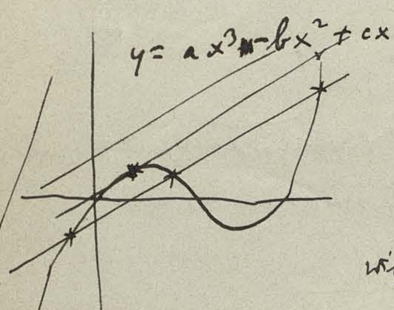
Najraczonalniej byłoby teraz badać w jakim stosunku te stoją do siebie i tak pokazałoby się mianowicie że krzywe rzędu 2go i klasy 2ej są identyczne.

To są jednak trudniejsze badania które sobie zostawimy na później, teraz będziemy się zajmowali krzywemi rzędu 2go, więc utworzonych przez równanie drugiego stopnia między spółrzędnemi punktu bieżącego. = krzywe stopnia drugiego ~~[illegible]~~

Wogóle $Ax^n + Bx^{n-1}y + \dots + A'x^{n-1} + B'x^{n-2}y + \dots + k = 0$ ma najwyżej n punktów przecięcia z dowolną prostą $y = ax + b$

$$Ax^n + Bax^n + \dots + (A' + bB)x^{n-1} + B'ax^{n-1} + \dots + K = 0$$

$$Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + \dots + K = 0$$ więc n pierwiastków dla x które albo mogą być rzeczywiste albo urojone



więc krzywe stopnia drugiego mogą być przecięte w 0, 1, 2 punktach rzeczywistych

Jeżeli uważamy także rozwiązania urojone jako wchodzące w rachubę to mówimy każda prosta przecina krzywą II w 2 punktach które są albo rzeczywiste, albo urojone albo tworzą punkt podwójny (styczna).

Ogólna forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Oznaczenie pochodzi ze spółrzędnych jednorodnych

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0$$

Mamy 6 stałych; przez jedną można podzielić więc niezależnie zmienne są 5 wielkości, zatem w ogólnym przypadku musi być danych 5 relacyj między x y t. j. 5 punktów do oznaczenia krzywej II.

N. p. 5 ~~punktów~~ obserwacyj do oznaczenia kształtu drogi komety (w rzeczywistości nie potrzebujemy tyle bo wiemy że słońce jest ogniskiem ~~o przechodzi nawet przez słońce itd.~~)

~~wstawiając~~ teraz $y = ax + b$ otrzymalibyśmy równanie

~~$Ax^2 + Bx + C = 0$~~ $\quad x^2 + Mx + N = 0$

więc $\quad x = -\frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} - N}$

$$y = b + a(\qquad)$$

punkt oznaczony przez $\begin{cases} x = -\frac{M}{2} \\ y = b - a\frac{M}{2} \end{cases}$ jest równie oddalony od dwóch punktów przecięcia; nazywamy środkiem cięciwy

---

Używając spółrzędnych biegunowych mielibyśmy $r = \cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$

$$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)r^2 + 2(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)r + a_{33} = 0$$

więc naturalnie 2 wartości r dla pewnego φ

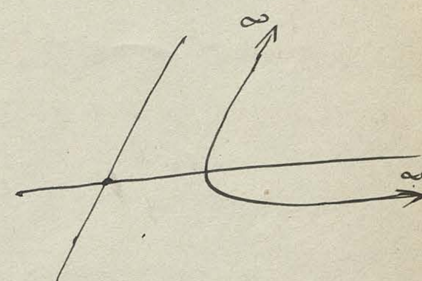
dzieląc przez r^2

$$(\qquad) + \frac{2(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)}{r} + \frac{a_{33}}{r^2} = 0$$

Jeśli $r=\infty$ jest możliwy pierwiastek, to pierwsze wyrażenie musi być $=0$

więc to będzie miało miejsce w kierunkach oznaczonych przez

$$a_{11} + 2a_{12}\,tg\varphi + a_{22}\,tg^2\varphi = 0$$



więc dwa kierunki, takie proste = asymptoty

równanie ich $y = x\,tg\varphi$:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \qquad \text{para prostych}$$

Według tego czy te proste są rzeczywiste czy urojone czy też jest to prosta podwójna

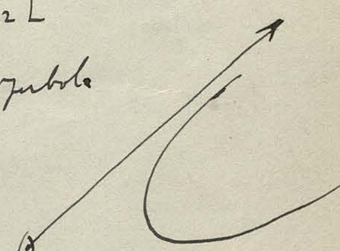
dzieli się te krzywe na elipsy hiperbole parabole

$$tg^2\varphi + \frac{2a_{12}}{a_{22}}\,tg\varphi = -\frac{a_{11}}{a_{22}}$$

$$tg\varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{11}}{a_{22}}} = \frac{1}{a_{22}}\left[-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\right]$$

zatem jeżeli $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ (=wyróżnik) >0 hiperbola

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ parabola



$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ elipsa

Inny ważny przypadek jeżeli φ tak obrane że $a_{13} + a_{23}\,tg\varphi = 0$

wtedy w tym kierunku dwa równe ale przeciwne wartości r więc punkt

0 będzie środkiem cięciwy w tym kierunku. ~~Gdy~~ Gdyby zaś przypadkowo

a_{12} i $a_{23}=0$ były wtedy wszystkie cięciwy są podzielone przez punkt 0 na

równe części = środek krzywej.

Łatwo pokazać że, jeżeli punkt 0 obieramy dowolnie to go zawsze w takie

pozycję możemy postawić:

$x = a + x' \qquad y = b + y'$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \sout{2[a_{11}a + a_{12}(a+b) + a_{22}b]} + 2(a_{11}a + a_{13} + a_{12}b)x$$

$$+ 2(a_{12}a + a_{23} + a_{22}b)y + a_{33} + a_{11}^2 + b_{11}^2 + 2a_{12} + \cdots = 0$$

a i b zawsze można tak wybrać że:

$$a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0$$
$$a_{12}a + a_{22}b + a_{23} = 0$$

tylko jeden punkt dowiedziony wszystkich cięciw = środek

$$a = \frac{a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} \qquad b = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

dla elipsy i paraboli to są zawsze wielkości skończone, dla paraboli

jednak $a = b = \infty$, tą ostatnią nazywa się dla tego także krzywą

bez środka. Wtedy więc równanie będzie miało kształt

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0 \quad \text{symet.}$$

Dążymy na to że w kierunku φ punkt 0 ~~da~~ jest środkiem cięciwy

teraz wstawiamy $x = x_0 + x'$ i zobaczymy jakie musi być x_0 i y_0
$y = y_0 + y'$

aby znów punkt 0' był środkiem cięciwy

równoległej t.j. pod tym samym kątem φ

Wtedy musi być: $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})\cos\varphi + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})\sin\varphi = 0$

$\sin\varphi$ $\cos\varphi$ i wszystkie inne wielkości z wyjątkiem x_0 y_0 są stałe zatem

wszystkie punkty zadość czyniące temu równaniu będą środkami cięciw

równoległych do φ $(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)x_0 + (a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)y_0 + \dots = 0$

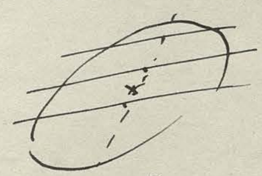
ale z formy tego równania wynika że przechodzi ono przez punkt

przecięcia prostych $a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$ $a_{12}x_0 + a_{22}y + a_{23} = 0$

t.j. właśnie środek

cięciwy przechodzące przez środek nazywamy średnicami zatem: środki

cięciw równoległych leżą na średnicy.

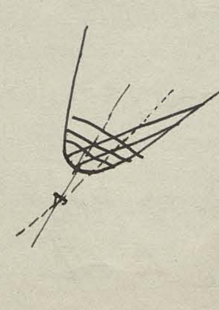


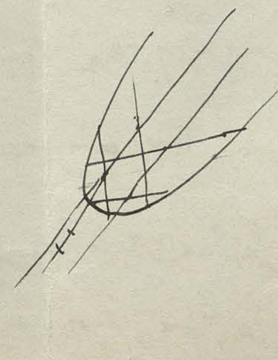
Zatem wszystkie średnice paraboli są równoległe bo idą przez środek

nieskończenie oddalony.

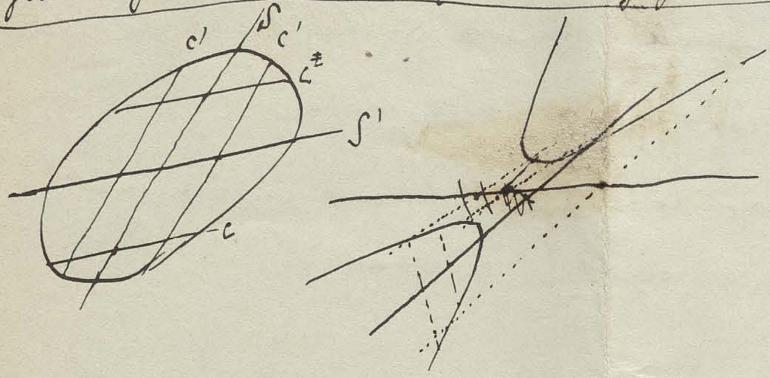
Jeżeli dany kawałek krzywej II to można rozstrzygnąć czy elipsa czy

hyperbola albo parabola wykreślając dwie średnice





Średnicami sprzężonemi nazywamy dwie takie z których każda jest miejscem geometrycznem środków cięciw równoległych z drugą



cięciwy C

S = ~~środek~~ średnica środków

cięciwy C' równoległe z S

S' jest znów równoległe z C

Dowód:

Równanie prostej S przechodzącej przez środki cięciw C pod kątem φ:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\,tg\,\varphi = 0$$

Jaki jej kierunek?

$$(a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi)x + (a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi)y + a_{13} + a_{23}\,tg\,\varphi = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$tg\,\varphi' = -\frac{A}{B}$$

$$= -\frac{a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi}{a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi}$$

Równanie prostej S' przez środki cięciw C' równoległych z tą średnicą:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\,tg\,\varphi' = 0$$

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})(a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi) - (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})(a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi)$$

kąt jej z osią X:

~~$[a_{11}(a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi) - a_{12}(a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi)]x + [a_{12}(a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi) - a_{22}(a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi)]$~~

$$tg\,\varphi'' = -\frac{a_{11} + a_{12}\,tg\,\varphi'}{a_{12} + a_{22}\,tg\,\varphi'}$$

$$\operatorname{tg}\varphi'' = -\frac{a_{11}(a_{12}+a_{22}\operatorname{tg}\varphi) - a_{12}(a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\varphi)}{a_{12}(a_{12}+a_{22}\operatorname{tg}\varphi) - a_{22}(a_{11}+a_{12}\operatorname{tg}\varphi)} = -\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\operatorname{tg}\varphi$$

$$= \operatorname{tg}\varphi$$

więc ma położenie czyli C ; to już bezpośrednio wynika ze symetrii równania

$$a_{22}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\varphi' + a_{12}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi') + a_{11} = 0$$

Takie średnice SS' nazywamy sprzężonemi

Jakie muszą zachodzić warunki aby dwie takie średnice mogły być prostopadłe do siebie?

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi'} \quad : \quad a_{12}\operatorname{tg}^2\varphi + (a_{11}-a_{22})\operatorname{tg}\varphi - a_{12} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi + \frac{a_{11}-a_{22}}{a_{12}}\operatorname{tg}\varphi = 1$$

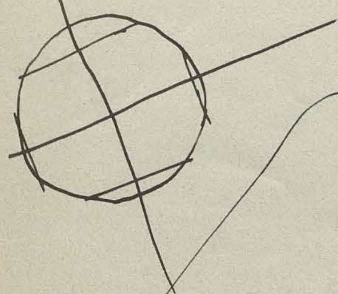
$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}} \pm\sqrt{\ldots}$$

Gdyby jednak $a_{11} = a_{22}$ było $a_{12} = 0$ to $\operatorname{tg}\varphi$ jest nieoznaczone, dowolne

wtedy więc każda para średnic sprzężonych ~~jest prostopadła do siebie~~ składa się z prostopadłych

$$a_{11}(x^2+y^2) + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

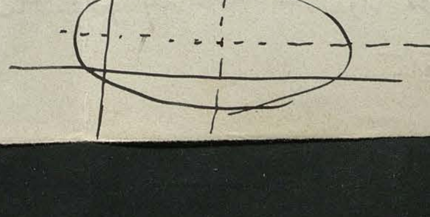
to jest wtedy koło



* Jeśli jednak $a_{12} = 0$ $a_{11} \gtrless a_{22}$ to mamy

$$\operatorname{tg}\varphi = 0 \quad \operatorname{tg}\varphi' = -\frac{1}{0} = -\infty$$

A więc wtedy średnice sprzężone leżą w kierunku osi ~~osi~~ X Y



W każdym wypadku więc ~~dwa~~ (ogólnie biorąc) istnieją dwa takie kierunki

te średnice nazywamy osiami krzywej:

Łatwo dowieść teraz że te osie są dwusiecznemi asymptot (co do kierunku)

~~Asymptot współrzędne:~~

~~A_1: $a_{22}y + a_{12}x \pm x\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}} = 0$~~

~~A_2: $a_{22}y + a_{12}x \mp x\sqrt{} = 0$~~

~~We formie normalnej:~~

~~$a_{22}y$~~

Dla asymptot mieliśmy:

$$tg\,\varphi = \frac{1}{a_{22}}\left[-a_{12} \pm \sqrt{}\right]$$

więc:

$$tg\,\varphi_1 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} + \dots$$

$$tg\,\varphi_2 = -\frac{a_{12}}{a_{22}} - \dots$$

$$tg\,\psi = tg\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$$tg(2\psi) = tg(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2\,tg\,\psi}{1 - tg^2\psi} = \frac{tg\,\varphi_1 + tg\,\varphi_2}{1 - tg\,\varphi_1\,tg\,\varphi_2} = \frac{-\frac{2a_{12}}{a_{22}}}{1 - \frac{a_{12}^2 - a_{12}^2 + a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}}$$

$$= \frac{-2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

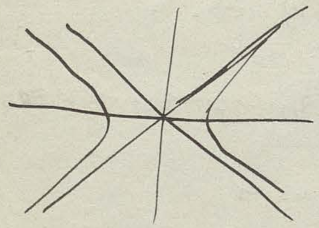
więc równanie dla $tg\,\psi$: $tg^2\psi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} tg\,\psi = 1$

~~$\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} tg\,\psi = 1 - tg^2\psi$~~ • to jest właśnie owe równanie

z którego wyprowadziśmy przedtem φ

Zatem ....

Odtąd będziemy nazywali asymptotami ~~krzywej~~ proste (z środka) w kierunkach ... których dowolne są osie.



Równanie stycznej do krzywej $f(x\,y)=0$

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$$

$$2a_{11}x\,dx + 2a_{12}(x\,dy + y\,dx) + 2a_{22}y\,dy + 2a_{13}\,dx + 2a_{23}\,dy = 0$$

$$dx(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + dy(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$$

$$(y - y_0)(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) + (x - x_0)(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) = 0$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{13}x + a_{23}y =$$

$$x'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + y'(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = -a_{13}x - a_{23}y - a_{33}$$

$$a_{11}xx' + a_{12}(x'y + xy') + a_{22}yy' + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0$$

Otrzymuje się zastępując x^2 w xx' etc.

Do tego samego rezultatu można dojść bez rachunku różniczkowego:

Jeżeli $a_{33}=0$ to $x=0$ $y=0$ jest punkt leżący na krzywej więc

$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)\, r + 2(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi) = 0$

jeżeli teraz promień poprowadzimy pod kątem $a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = 0$

więc $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_{13}}{a_{23}}$ to także drugi punkt przecięcia $r=0$

ta prosta będzie więc styczna i jej równanie: $a_{13}x + a_{23}y = 0$

A jeżeli dane ogólne równanie:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \qquad + a_{33} = 0$ | i chodzi nam o styczną w punkcie $x_0 y_0$

to potrzebujemy tylko przesunąć początek współrzędnych

$\xi = x - x_0$ $\quad \eta = y - y_0$ | wtedy $a_{33}=0$ ~~jest~~ bo punkt 0 będzie leżał na krzywej.

$x = \xi + x_0$

A będziemy mieli

$a_{11}\xi^2 + \dots \qquad + a_{23}'\eta = 0$

Równanie stycznej w nowych współrzędnych będzie $a_{13}'\xi + a_{23}'\eta = 0$

a w starych: $a_{13}'(x-x_0) + a_{23}'(y-y_0) = 0$

$a_{13}' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}$ $\qquad a_{23}' = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}$

Więc znów to samo równanie co przedtem.

Styczne w dwóch punktach elipsy $x_1\,y_1$ $x_2 y_2$ przecinają się w punkcie $x'y'$

$$a_{11}x'x_1 + a_{12}(x'y_1 + y'x_1) + a_{22}y'y_1 + a_{13}(x'+x_1) + a_{23}(y'+y_1) + a_{33} = 0$$

$$a_{11}x'x_2 + a_{12}(x'y_2 + y'x_2) + \text{——} = 0$$

Jeśli teraz uważamy $x'\,y'$ jako stałe to równanie

$$a_{11}x'x + a_{12}(x'y + y'x) + a_{22}y'y + \text{- -} = 0$$

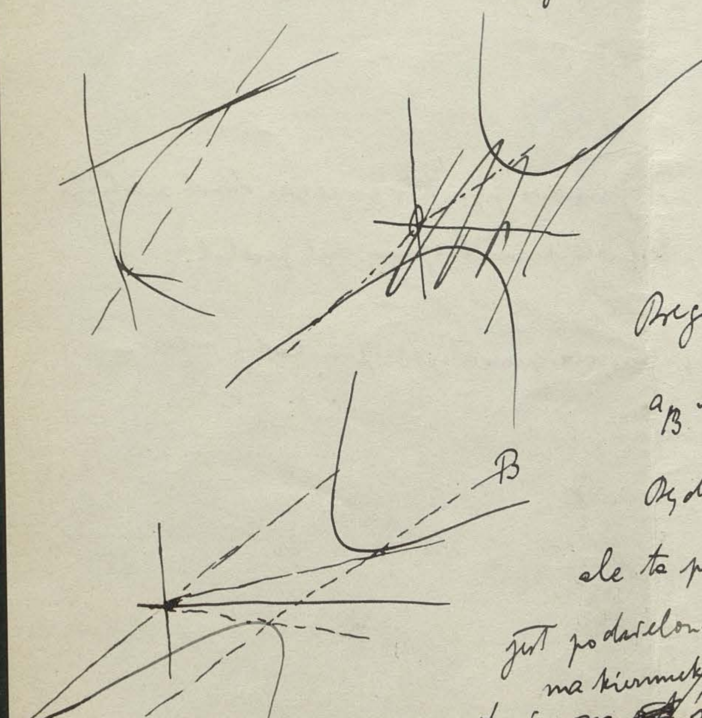
przedstawia prostą przechodzącą przez punkty $x_1\,y_1$ i $x_2\,y_2$ = biegunowa

a punkt $x'y'$ = biegun

Także tak: to równanie przedstawia biegunową jak długo biegun leży po

za elipsą, gdy przyjdzie w elipsę to stanie się styczną

biegun stycznej = punkt styczności



Biegunowa środka = punkt w nieskończoności

bo równanie jej ($a_{13}=0$, $a_{23}=0$, $x=0$, $y=0$) $a_{33}=0$

Biegunowa wykreślona z punktu O:

$$a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33} = 0$$

Będzie równoległa z prostą $a_{13}x + a_{23}y = 0$

ale ta prosta ma ów kierunek w którym

jest podzielona na równe części przez ~~..~~ początek O

t. j. ona ~~jest~~ na kierunek średnicy ~~przechodzącej~~ sprzężonej ze średnicą przechodzącą przez ów punkt

więc biegunowa równoległa do średnicy ~~przechodzącej~~ sprzężonej ze średnicą przechodzącą przez biegun

n. p. jeśli biegun leży na krzywej: styczna = kierunek średnicy sprzężonej –

$a_{11}x'x'' + a_{12}(x'y'' + y'x'') + a_{22}y'y'' + a_{13}(x'+x'') + \dots = 0$

Jest warunek aby punkt $x''y''$ leżał na biegunowej punktu $x'y'$

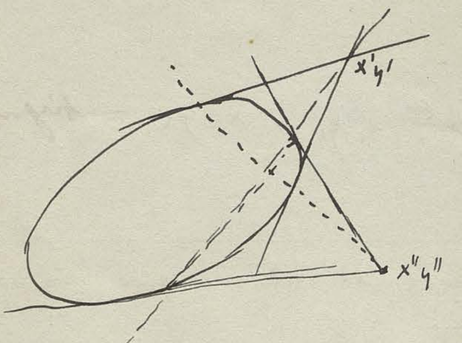
to jest zarazem odwrotnie warunek aby punkt $x'y'$ leżał na biegunowej

~~albo też tak~~

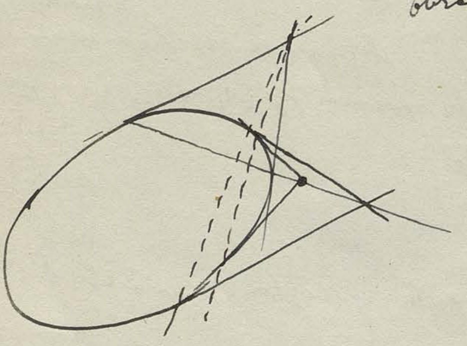
~~Biegunowa należąca do punktu przecięcia dwóch prostych przecho~~

~~Jeżeli~~

punkty sprzężone

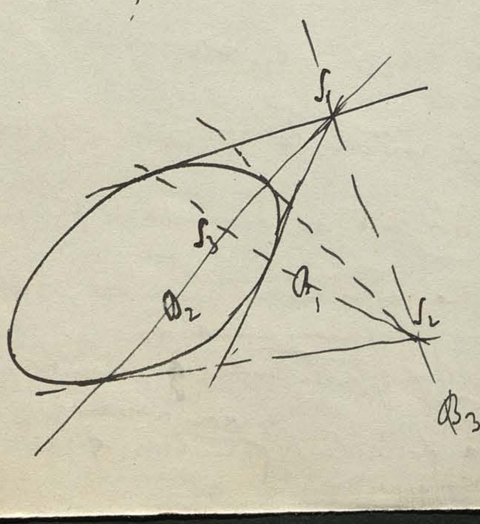


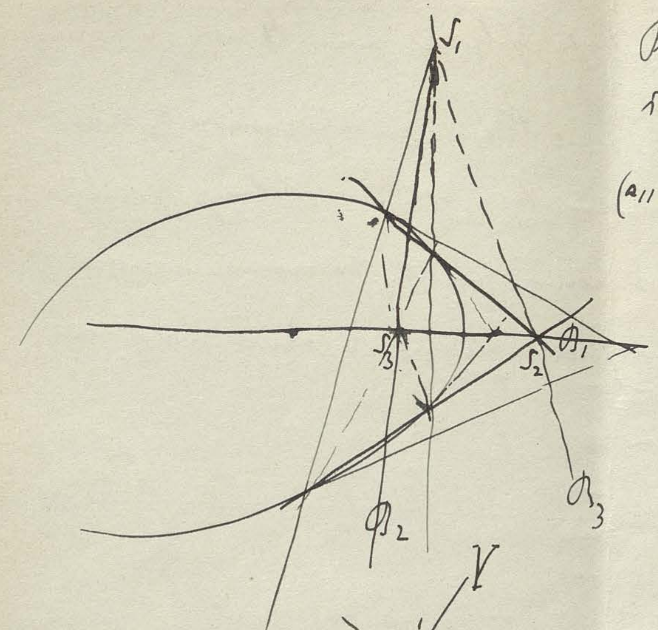
Jeżeli Punkt $x'y'$ porusza się po prostej to biegunowa jego będzie się obracała koło bieguna tej prostej



Biegunowa punktu przecięcia dwóch prostych przechodzi przez bieguny tych prostych.

Biegunowa punktu S_3 przechodzi przez bieguny $S_1 S_2$





Punkt S_3 jako przecięcie spółbiegunowych
z dwie proste pod kierunkami φ, ψ

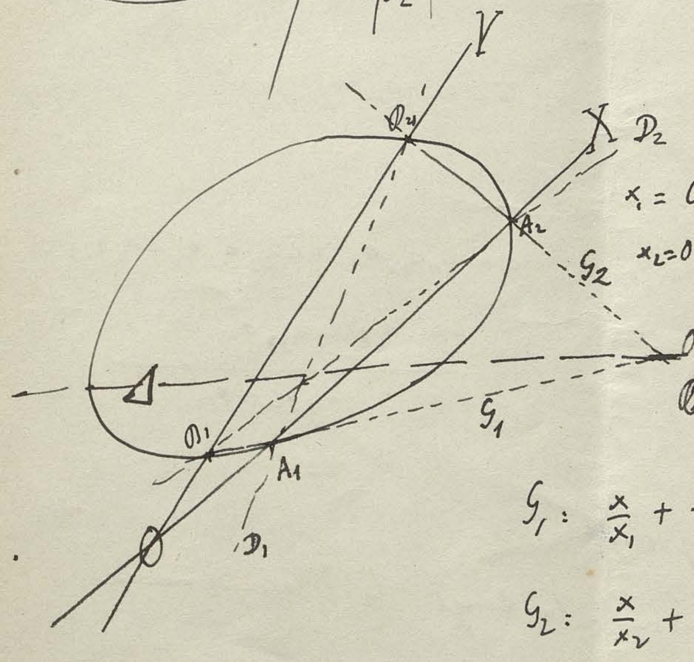
$$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)r^2 + (\qquad)r + a_{33} = 0$$

$$Ar^2 + 2Br + C = 0$$

$$r^2 + \frac{2B}{A}r = -\frac{C}{A}$$

$$r = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A}}$$

$$= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$



~~$x_1 x_2$~~ $a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0$

$$x_1 = OA_1 = \frac{-a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}}$$

$x_2 = OA_2$

$$\left.\begin{matrix} OB_1 \\ OB_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-a_{23} \pm \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{22}}$$

$G_1:\ \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1$ | $D_1:\ \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1$

$G_2:\ \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_2} = 1$ | $D_2:\ \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} = 1$

$$\frac{x}{x_1} + \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{y}{y_2} = 2$$

$\equiv G_1 + G_2$

$\equiv D_1 + D_2$ } zatem jest to prosta przechodząca przez ich punkty przecięcia t.j. prosta Δ

$$x\left(\frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2}\right) + y\left(\frac{1}{2y_1} + \frac{1}{2y_2}\right) = 1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{a_{11}}{-a_{13} + \sqrt{\ }} + \frac{a_{11}}{-a_{13} - \sqrt{\ }} = \frac{a_{11}(-a_{13} - \sqrt{\ } + -a_{13} + \sqrt{\ })}{a_{13}^2 - a_{13}^2 + a_{11}a_{33}} = \frac{-2a_{13}}{a_{33}}$$

zatem $\Delta = a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$ tj. biegunowa punktu O

Zatem z własności czworoboku zupełnego wypływa że mamy 4 promienie harmoniczne utworzone przez 2 boki przeciwległe, przez łączącą punktu przecięcia tychże i punktu przecięcia drugich 2 boków i przez biegunową tego ostatniego punktu

albo też: dany punkt stały, szukany punkt harmonicznie sprzężony do niego względem dwuch punktów przecięcia krzywej z jakimś promieniem

jego miejsce geometryczne = biegunowa.

Przekształcanie:

wstawiliśmy $x = x' + x_0$ potem x_0 i y_0 tak że $a'_{13}=0$ $a'_{23}=0$

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$$

$$a'_{33} = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + \dots = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{wyróżnik}$$

Jeśli teraz obierzemy osie jako osie spółrzędnych to będziemy ~~mieli~~

spółrzędnych wartości $xy=0$ ||| : $a'_{12}=0$

bo jeśli jakąś tędź x weźmiemy musimy otrzymać równe i przeciwne wartości dla y ponieważ środek cięciw równoległych z osią Y

zatem zapomocą obrotu osi otrzymamy $a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{33} = 0$

Później dowiedziemy że wyróżnik $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ pozostaje niezmienionym przy jakimś bądź przekształceniu liniowym, mianowicie także przy takim obrocie

$x = x' \cos\vartheta - y' \sin\vartheta$

$y = x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta$

Tutaj także $a_{11} + a_{22}$ pozostanie niezmienione bo

$x'^2 (\underbrace{a_{11} \cos^2\vartheta + 2a_{12} \cos\vartheta \sin\vartheta + a_{22} \sin^2\vartheta}_{a_{11}''}) + 2x'y' \dots + y'^2 (\underbrace{a_{11} \sin^2\vartheta - 2a_{12} \sin\vartheta \cos\vartheta + a_{22} \cos^2\vartheta}_{a_{22}''})$

$a_{11}'' + a_{22}'' = a_{11} + a_{22}$

$a_{12}''^2 - a_{11}'' a_{22}'' = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$

$a_{11}'' a_{22}'' = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$

$z^2 - (a_{11} + a_{22}) z + a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ } z będzie a_{11}'' albo a_{22}''

$z = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{(\quad)^2 + a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}$

$\left.\begin{matrix} a_{11}'' \\ a_{22}'' \end{matrix}\right\} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2}$

O paraboli później

Więc otrzymamy równanie w formie:

$a_{11}'' x^2 + a_{22}'' y^2 + a_{33}'' = 0$

El. jeżeli $-a_{11}'' a_{22}'' < 0$ więc $a_{11}'' a_{22}'' > 0$

Hyp. jeżeli $a_{11}'' a_{22}'' < 0$

Odcinki na osiach $\sqrt{-\frac{a_{33}''}{a_{11}''}}$ $\sqrt{-\frac{a_{33}''}{a_{22}''}}$

dzieląc przez $-a_{33}''$

i wstawiając $-\frac{a_{33}''}{a_{11}''} = a^2$ $\quad -\frac{a_{33}''}{a_{22}''} = b^2$

więc Ell. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Hyp. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$) jeśli przyjmujemy $a_{22}<0$

---

w spółrzędnych biegunowych:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} \pm \frac{\sin^2\varphi}{b^2} \qquad a^2 \pm b^2 = e^2$$

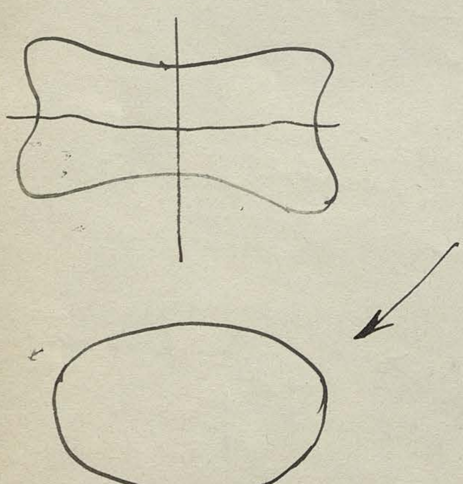
$$\frac{a^2 \pm b^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\varphi} \quad \text{Ell.}$$

$$r^2 = \frac{-b^2}{1-e^2\cos^2\varphi} \quad \text{Hyp.}$$

Ellipsa

Z ~~tamtej~~ górnej formy już widać że w 4 kwadrantach symetryczna względem osi

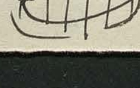


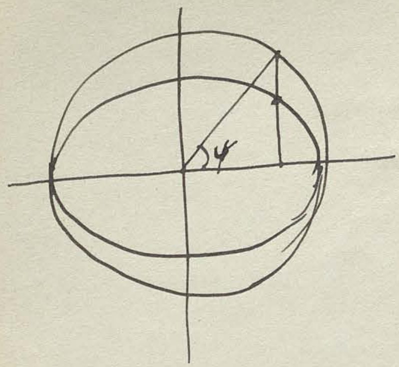
z dolnej jednak że x więcej zmniejsza szybciej od φ=0 aż do $\varphi=\frac{\pi}{2}$ więc więcej wklęsła do środka

Także z tego że

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

więc jeśli wykreślimy koło a i zmniejszymy wszystkie rzędne w tym samym stosunku $\frac{b}{a}$





$x = a \cos\varphi$ $\qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 =$

$\frac{x^2}{a^2} \ldots$

$y = \frac{b}{a} \cdot a \sin\varphi$

$= b \sin\varphi$

φ = Anomalia excentryczna

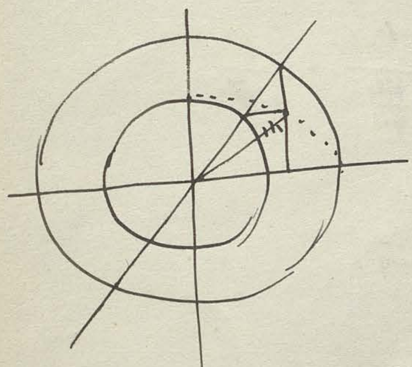
= kąt mimośrodowy

excentryczny

więc elipsa = rzut koła || dlatego n.p. pole = obw…

pod kątem $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ $\qquad = a^2\pi \cdot \frac{b}{a}$

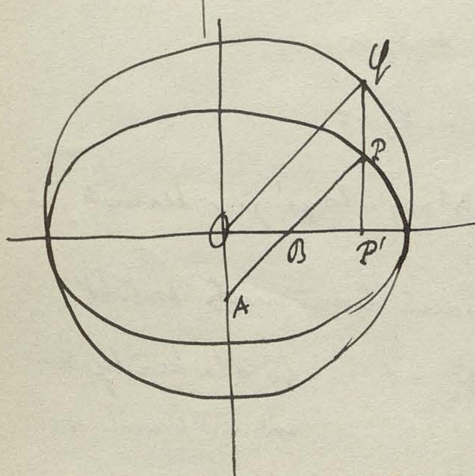
Inna konstrukcja



bo ~~$r^2 = b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi$~~

$x = a \cos\varphi$

$y = b \sin\varphi$ etc.

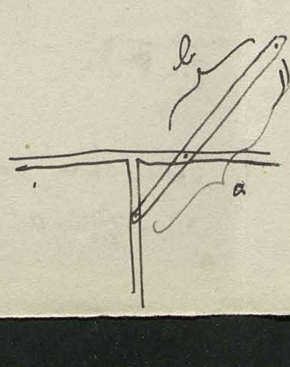


$BP : \varphi P = PP' : \varphi P' = b : a$

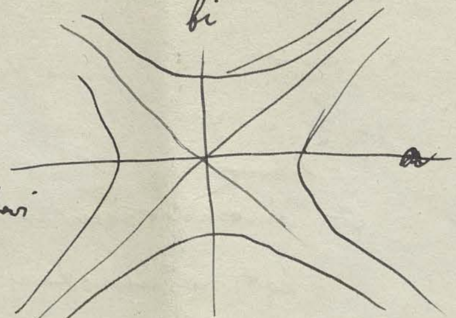
($\varphi P = a$)

zatem $BP = b$

zatem polega instrument do wykreślania elips



Hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2\varphi - 1}$$

Wierzch wypukłą stroną ku środkowi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

hiperbola sprzężona

---

kierunek asymptot: $r = \infty$: $\varepsilon^2 \cos^2\varphi = 1$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{1} = \frac{\frac{a^2+b^2}{a^2} - 1}{1} = \frac{b^2}{a^2}$$

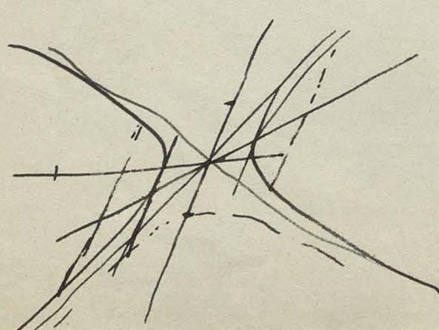
$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$$

Naturalnie tak samo także bezpośrednio, jak dawniej:

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1 \qquad \operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$$

Równanie pary asymptot: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$

Używając układu spółrzędnych ukośnych moglibyśmy ułożyć je w kierunku jakichś dwuch średnic sprzężonych.



Także wtedy równanie będzie miało kształt

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

bo dla każdego x równe i przeciwne y

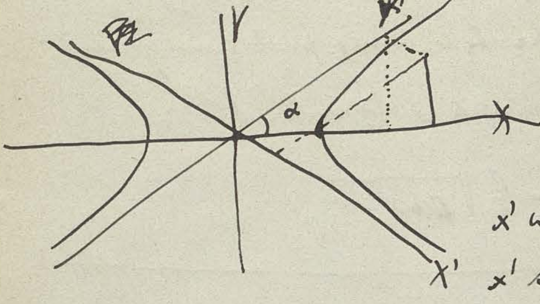
Także też asymptoty dane przez

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0 \quad \Bigg| \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0, \quad \frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0$$

Więc dowolnemu x odpowiadają równe prawie y dla asymptot i dla krzywej

zatem odcinki między niemi są równe.

A równoległobok utworzony z ~~[illegible]~~ średnic a' b' dzie kierunki asymptot (punkt 4)



Przejście do ~~układu~~ równań gdzie osiami spółrzędnych są asymptoty:

$$x' \cos\alpha + y' \cos\alpha = x$$
$$x' \sin\alpha - y' \sin\alpha = y$$

zatem: $$\frac{(x'+y')^2}{a^2}\cos^2\alpha - \frac{(x'-y')^2 \sin^2\alpha}{b^2} = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \Big\| \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{a^2+b^2}$$

$$\frac{(x'+y')^2}{a^2} - \frac{(x'-y')^2}{b^2}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\frac{(x'+y')^2}{a^2} - \frac{(x'-y')^2}{b^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}$$

$$\underbrace{(x'+y')^2 - (x'-y')^2}_{4x'y'} = a^2+b^2$$

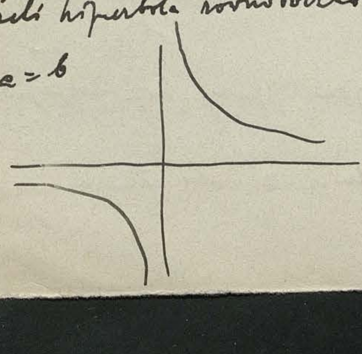
$$x'y' = \frac{a^2+b^2}{4}$$
$$= k^2$$

to można także wprost znaleźć bo tylko wtedy każdemu x tylko jedno y i odwrotnie.

Wnioski

jeżeli hyperbola równoboczna

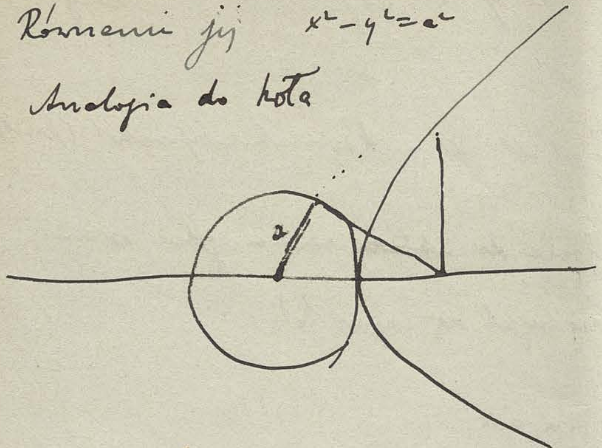
$a = b$



$a = k\sqrt{2}$

Równanie jej $x^2 - y^2 = a^2$

Analogia do koła



Jeżeli się wykreśliło w ten sposób równoboczną hyp. to znajduje się jakąś bądź inną przez zmniejszenie rzędnych w stosunku $\frac{b}{a}$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

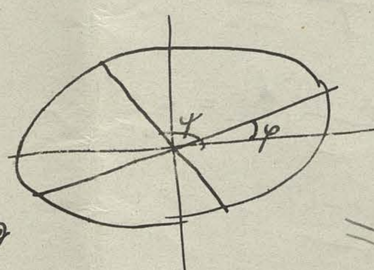
Przypominam:

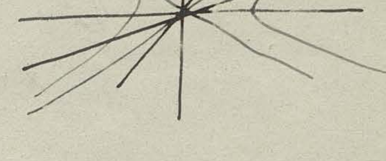
Równanie prostej przechodzącej przez środek cięciw wykreślonych pod kątem φ było

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})\, tg\,\varphi = 0$$

Zatem tutaj:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2}\, tg\,\varphi = 0$$ El. / Hyp.





~~lub oznaczając przez x y współrzędne jednej średnicy a x y drugiej~~

$$\frac{y}{x} = tg\,\psi$$

$$tg\,\varphi\; tg\,\psi = \mp \frac{b^2}{a^2}$$

Zatem w elipsie średnice sprzężone leżą z przeciwnych stron osi, w hyp. na tej samej stronie (co można też wyrazić przez kąty ostre i rozwarte). Czy może być $\varphi = \psi$? Przy elipsie urojone, przy hyp. rzeczywiste

$tg\,\varphi = tg\,\psi = \pm\frac{b}{a}$ = asymptoty; to są więc średnice ze sobą samymi sprzężone.

Jeśli $tg\,\varphi > \frac{b}{a}$ to $tg\,\psi < \frac{b}{a}$ zatem przy hyperboli leżą one zawsze na przeciwnych stronach asymptoty

Co do długości tych średnic.

Punkty przecięcia $x'y'$, $x''y''$ więc $tg\,\varphi = \frac{y'}{x'}$ | $tg\,\psi = \frac{y''}{x''}$

Jeśli wiemy $y'x'$ a szukamy $y''x''$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{b^2}\frac{y'}{x'} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{array}\right\} \quad x = \mp \frac{a^2}{b^2}\frac{yy'}{x'} \qquad \left[\frac{1}{a^2}\frac{a^4}{b^4}\left(\frac{y'}{x'}\right)^2 \pm \frac{1}{b^2}\right]y^2 = 1$$

$$\left(\frac{y''}{b}\right)^2 = \frac{1}{\frac{a^2}{b^2}\frac{y'^2}{x'^2} \pm 1} = \frac{b^2 x'^2}{\pm a^2 b^2} = \left(\frac{x'}{a}\right)^2 \pm$$

$$\frac{y''}{b} = \pm\frac{x'}{a} \qquad \frac{x''}{a} = \pm\frac{y'}{b}$$

A przy hyperboli: $\frac{y''}{b} = \pm\frac{x'}{a}\,i$ $\quad \frac{x''}{a} = \pm\frac{y'}{b}\,i$

Nie potrzebujemy się właściwie powoływać na dawniejsze rezultaty, aby znaleźć powyższe równanie bo znamy równanie stycznej w punkcie $x'y'$

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$$

a do niej właśnie średnica sprzężona musi być równoległa (przechodząca przez 0) więc $\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0$

Co do długości:

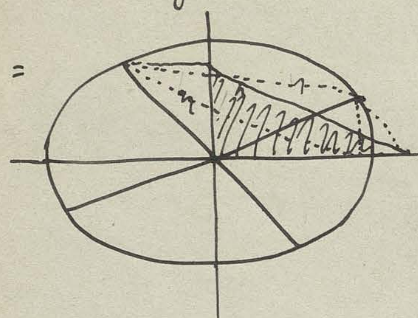
$$d'^2 = x'^2 + y'^2 \qquad d''^2 = \pm\left(\frac{b^2}{a^2}x'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2\right)$$

$$d'^2 \pm d''^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} \pm \frac{y'^2}{b^2}\right)(a^2 \pm b^2) = a^2 \pm b^2$$

więc suma resp. różnica quadratów średnic sprzężonych = stała.

Pole równoległoboku z nich utworzonego:

=



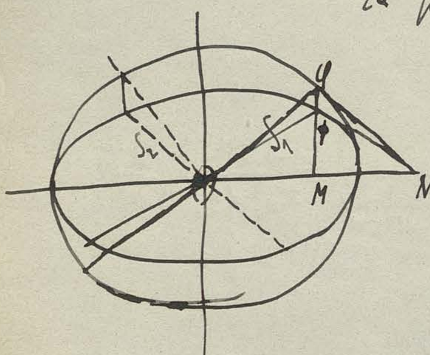
$$y''\left(x' + y'\frac{x''}{y''}\right) = y''x' + y'x''$$

$$= \frac{b}{a}x'^2 + \frac{a}{b}y'^2 = ab\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}\right) = ab$$

stałe

Co do wykreślenia:

za pomocą koła



co bezpośrednio wynika z tego że elipsa = rzut koła

albo także z tego że

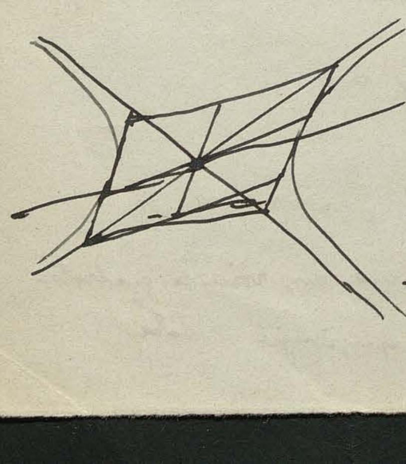
$\text{tg}\, QOM = \frac{a}{b}\, \text{tg}\,\varphi$

$\text{tg}\, QNM = \text{ctg}\, QOM = \frac{b}{a}\, \text{ctg}\,\varphi$

$\text{tg}\, PNM = \frac{b^2}{a^2}\, \text{ctg}\,\varphi$ więc $\text{tg}\,\varphi\, \text{tg}\,\psi = \frac{b^2}{a^2}$

Podobnie ale więcej skomplikowane przy hiperboli.

Hiperbola: dowiedliśmy już że odcinki równe, z tego sposób wykreślenia, jeśli dany jeden punkt i asymptoty.



Widzieliśmy także że asymptoty są przekątne równoległoboku utworzonego ze średnic sprzężonych (podzielone na równe części przez punkt styczności) więc według poprzedniego wzoru pole tego równoległoboku = 4 ab = stałe.

[Można także pokazać że iloczyn odcinków stały = b^2]

Styczna w punkcie P:

$$\frac{x'x}{a^2} \pm \frac{y'y}{b^2} = 1 \quad \Big\} \quad \operatorname{tg} y = \mp \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

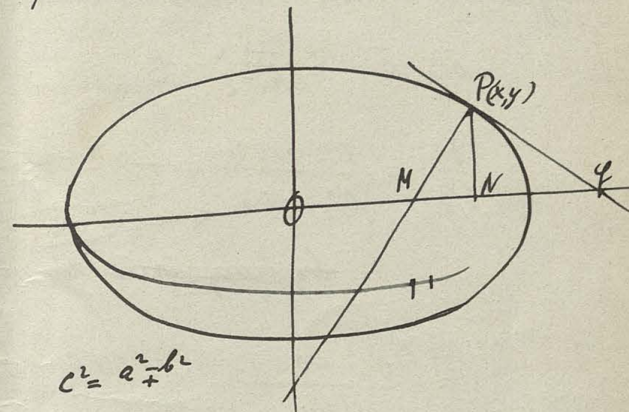
Normalna:

$$y - y' = \pm \frac{a^2 y}{b^2 x}(x - x')$$

~~$\frac{x}{a^2}(y-y') \pm \frac{y}{b^2}(x-x') = 0$~~

$$\frac{a^2(x-x')}{x} \mp \frac{b^2(y-y')}{y} = 0$$

$$\frac{a^2 x'}{x} \mp \frac{b^2 y'}{y} = c^2 \qquad c^2 = a^2 \mp b^2$$



Z tego długość $OM = \frac{c^2 x}{a^2}$ więc propor. do x, zatem normalna dzieli odcięte punktu styczności w stałym stosunku.

Jeżeli się uważa teraz x' y' jako dane a x y jako zmienne to ~~…~~ nadto miejsce geometryczne =

$$c^2 xy \pm b^2 x y' - a^2 y x' = 0$$

Zatem krzywa drugiego stopnia; tam gdzie ona przecina daną krzywą można wykreślić normalną, która będzie przechodziła przez punkt $x'y'$ więc możliwych punktów przecięcia 4 (2 zawsze rzeczywiste) więc z punktu dowolnego można wykreślić (2 albo) 4 normalne do krzywej.

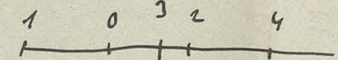
długość $O\varphi = x + y \frac{a^2 y}{b^2 x} = \frac{a^2}{x}$

Zatem iloczyn $\overline{OM}\ \overline{O\varphi} = c^2 =$ stały więc jakiekolwiek pary takich punktów tworzą (i wówczas

Więc te punkty $M\varphi$ są harmoniczne względem $\pm c$ } Ogniska (foci, Brennpunkte)

Tak samo także względem osi Y ale tam są te ogniska urojone.

Przypominam: jeśli



$$\overline{03}\;\overline{04} = \overline{02}^2 \quad \text{to}$$

$$\frac{32}{13} = \frac{02-03}{02+03} \quad \left(= -\frac{42}{14} = -\frac{04-02}{04+02} \right)$$

~~do mnożności~~ mnożąc* przez $\overline{02}$ otrzymamy

$$= \frac{02^2 - 02\,03}{02^2 + 03\,02} = \frac{03\,04 - 02\,03^*}{03\,04 + 03\,02} = \frac{04-02}{04+02} = \frac{24}{14} = -\frac{42}{14} \text{ t.j. tam}$$

Odległości punktu elipsy od ognisk

$$y^2 = \mp \frac{b^2}{a^2}x^2 \pm b^2$$

$$r^2 = (x-e)^2 + y^2 \quad \Big| \quad r'^2 = (x+e)^2 + y^2$$

$$= (x-e)^2 \mp \frac{b^2}{a^2}x^2 \pm b^2 \qquad \ldots$$

$$r^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2 \qquad r'^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2}{a^2}x^2$$

~~$r^2 + \ldots$~~ $x > 0$

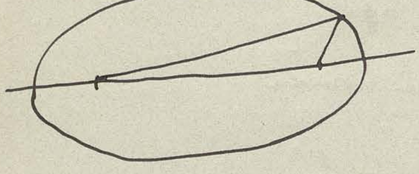
$$r = \pm\left(a - \frac{e}{a}x\right) \qquad r' = \left(a + \frac{e}{a}\right)x \quad \Big| \quad x<0 \quad r = a - ex \qquad r' = \pm(a + ex)$$

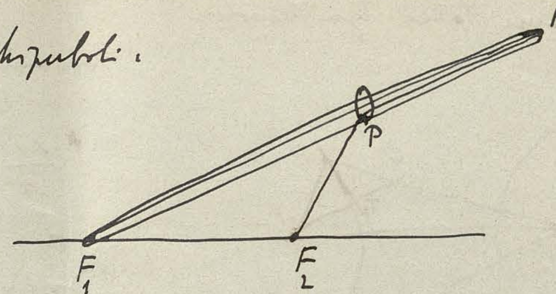
$$rr' = a^2 - \frac{e^2}{a^2}x^2 = b^2\,!$$

$r \pm r' = 2a$ // Z tego znane określenia elipsy i hip. i metody do wykreślenia za pomocą nici %.

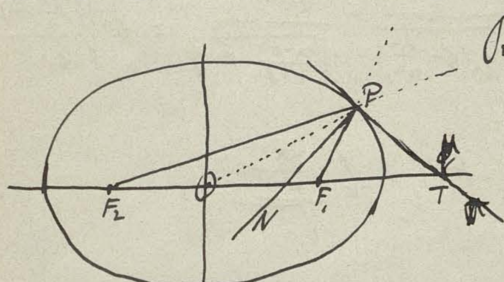
$$\frac{e}{a} = \varepsilon$$

Wykreślenie elipsy: hiperboli:





$$F_1P - F_2P = F_1P + PM - (F_2P + PM) = \text{const.}$$



Punkty N T harmonicznie podzielone przez F_2 F_1

$$\frac{NF_1}{NF_2} = \frac{TF_1}{TF_2}$$

więc $\frac{\sin NF_1}{\sin NF_2} = \frac{\sin TF_1}{\sin TF_2}$

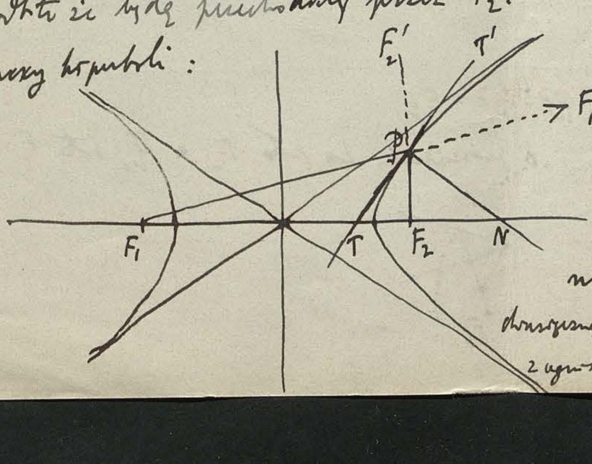
ponieważ $N \perp T$

$$\frac{\sin TF_1}{\sin TF_2} = \frac{\cos NF_1}{\cos NF_2} = \frac{\sin NF_1}{\sin NF_2}$$

zatem: $\frac{\sin NF_1}{\cos NF_1} = \operatorname{tg} NF_1 = \operatorname{tg} NF_2$ więc $\sphericalangle NPF_1 = NPF_2$

Zatem jeśli z punktu F_1 wychodzą promienie, to one wszystkie ~~[illegible]~~ zostaną tak odbite że będą przechodziły przez F_2.

A przy hiperboli:



$F_1PT = TPF_2$

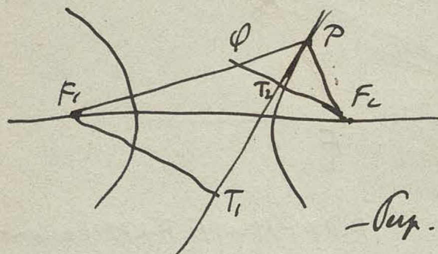
$F_2PN = NPF_1'$

więc ~~tak~~ po odbiciu jak gdyby promienie wychodziły z punktu F_1

można połączyć oba wyniki: styczna jest dwusieczną kątów zewnętrznych utworzonych przez tworzące z ogniskami w elipsie a wewnętrznych przy hiperboli.

To samo także tym sposobem:

Równanie stycznej:



$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1$$

W formie normalnej

$$-\mathrm{Dup.} = \frac{x'\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}} \pm \dots - \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}} =$$

$x' = \pm e$

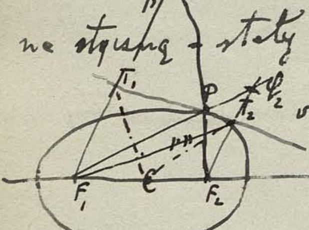
$y' = 0$

$$F_2T_2 = \frac{-\frac{ex}{a^2}+1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{-\frac{ex}{a^2}+1}{\sqrt{\frac{x^2e^2}{a^4b^2}+\frac{1}{b^2}}} = b\sqrt{\dots}$$

$$F_2T_2 = b\,\frac{-\frac{ex}{a^2}+1}{\sqrt{1-\frac{e^2x^2}{a^4}}} \qquad F_1T_1 = b\,\frac{\frac{ex}{a^2}+1}{\sqrt{}}$$

$$\overline{F_1T_1}\cdot\overline{F_2T_2} = b^2$$

więc iloczyn z ~~odcinków~~ prostopadłych na styczną — stały



więc $= b^2$

Możemy jednak wyrazić:

$$PF_2 = r = a - \frac{e}{a}x \qquad PF_1 = r_1 = a + \frac{e}{a}x$$

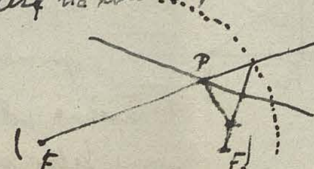
Zatem $\frac{F_2T_2}{F_2P} = \frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{}} = \frac{F_1T_1}{F_1P} = \frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{}}$

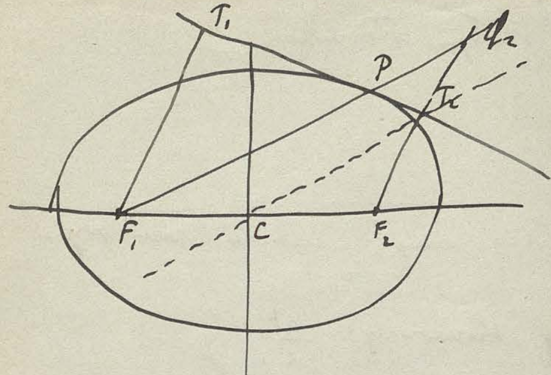
więc kąty $PF_2T_2 = PF_1T_1$ więc ...

Ponieważ $F_1P \pm F_2P = 2a = F_1\Phi_2 \mp \Phi_2P \pm F_2P = F_1\Phi$

to wszystkie punkty Φ_2 leżą na kole o promieniu $2a$ koło F_2 a Φ_1 koło F_1

z tego wykreślenie stycznej





Ponieważ $F_2T_2 = \frac{1}{2} F_2\varphi_2$

$F_2C = \frac{1}{2} F_2F_1$

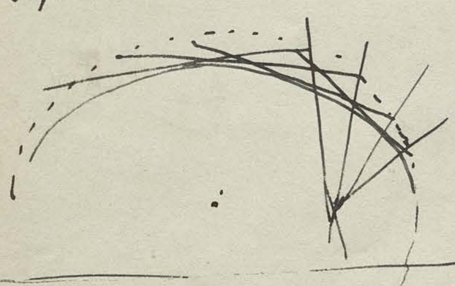
to $CT_2 \parallel F_1\varphi_2$

zatem $CT_2 = \frac{1}{2} F_1\varphi_2$

$= \frac{1}{2} 2a = a$

Zatem ~~punkty~~ spodki prostopadłych na styczną jakiegoś punktu leżą na kole o promieniu a wykreślonym ze środka.

Także tak można powiedzieć: jeśli (kąty prostą ~~tak że jednym ramieniem~~ wykreślimy za pomocą promieni przechodzących przez punkt F_1) w punktach przecięcia z kołem a to zawierają one elipsy, resp. hip. zależnie od tego czy punkt F wewnątrz koła czy zewnątrz



kierownicą (directrix) krzywej nazywamy biegunową należącą do ogniska jako bieguna.

więc $\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1$ $\quad\Big\|\quad y' = 0, \; x' = \pm e$

$x = \pm \frac{a^2}{e}$ więc u elipsy zewnątrz w hiperboli wewnątrz, prostopadła $\perp X$

krzywa względem nich zawsze wypukła.

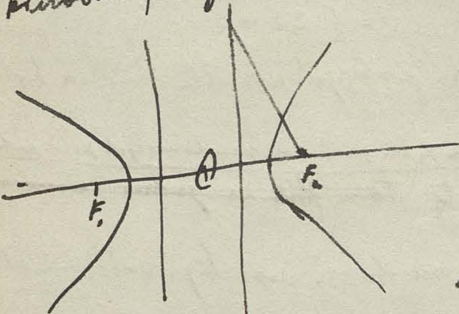
więc odległość jakiegoś punktu krzywej od kierownicy:

$x \mp \frac{a^2}{e} = \frac{a}{e}\left(\frac{ex}{a} \mp a\right) = \frac{a}{e} r_1$ więc można te krzywe także określić w ten sposób że są one miejscem geometrycznem punktów których odległości

od pewnego punktu i od pewnej prostej są w stałym stosunku.

jeśli stosunek ten > 1 hyperbola
< 1 elipsa

Biegunowa jakiegoś punktu na kierownicy musi przechodzić przez biegun kierownicy = ognisko



$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

punkt na kierownicy: $\frac{a^2}{e}, y$

biegunowa do niego należąca:

$$\frac{x'}{e} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1 \qquad \frac{A}{B} = \frac{b^2}{ey'}$$

a łącznica z ogniskiem:

$$y = \frac{y'}{e - \frac{a^2}{e}}(e - x) \qquad \frac{A}{B} = \frac{y'}{e - \frac{a^2}{e}} = \frac{-y'e}{b^2}$$

$$y\left(e - \frac{a^2}{e}\right) + y'x = y'e$$

zatem tg α · ctg β więc

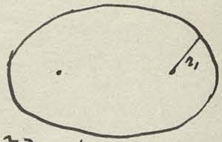
~~Jest one~~ są prostopadłe do siebie.

Z określenia kierownicy wypływa że jakaś bądź prosta przechodząca przez ognisko jest harmonicznie biegunowa przez punkty przecięcia z kierownicą i z krzywą a ogniskiem. [bo biegunowa = miejsce geometryczne punktu harmonicznego ~~względem~~ do bieguna względem punktów przecięcia z krzywą].

Równanie w odniesieniu do F_1

$x = \xi - e$ $\qquad r_1 = a - \frac{e x}{a} = a - \varepsilon(e + r_1 \cos\varphi)$

$y = \eta$



$\frac{\xi^2 - 2e\xi + e^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$

$x = \frac{a}{e}(a - r_1)$

$y = r_1 \sin\varphi$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{(a - r_1)^2}{e^2} + \frac{r_1^2 \sin^2\varphi}{b^2} = 1$

$b^2(b^2 - 2a r_1 + r_1^2) + (a^2 - b^2) r_1^2 \sin^2\varphi = 0$

~~$b^2(b^2 - 2ar_1 + r_1^2 \sin^2\varphi) +$~~

~~$b^2(b^2 - 2ar + r^2 - r^2\sin^2\varphi) + a^2 r^2 - a^2 r^2 \sin^2\varphi = 0$~~

$b^4 - 2ab^2 r + r^2\left[b^2 + (a^2 - b^2)\sin^2\varphi\right] = 0$

$p^2 - 2pr + r^2\left[\frac{p}{a}\sin^2\varphi + 1\right] = 0$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{e^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$

$y = \frac{b^2}{a}$

$r_1\left[1 + \varepsilon\cos\varphi\right] = a - \varepsilon e = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$ = rzędna w ognisku

$r = \frac{p}{1 \pm \varepsilon\cos\varphi}$

$r_2 = \frac{e x}{a} - a = \frac{e}{a}(e - r\cos\varphi) - a$

$r\left[1 + \varepsilon\cos\varphi\right] = \frac{e^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$

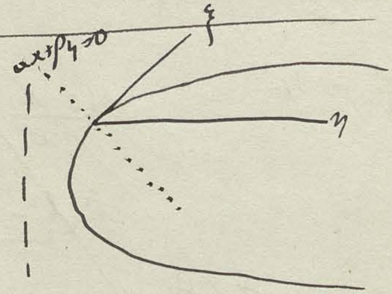
$r = \frac{p}{1 \pm \varepsilon\cos\varphi}$

Równania w odniesieniu do wierzchołka:

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Bigg\} \quad y^2 = 2px \mp \frac{p}{a}x^2$$



Parabola

Jeżeli $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ więc

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Jeżeli wykreślimy teraz prostą $\alpha x + \beta y = 0$

$2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

to wstawiając jakieś bądź x, y w te równania otrzymujemy długości prostopadłych

na nie $= \eta$, ξ jeżeli zrobimy je osiami $\xi \eta$

$\eta^2 = 2p'\xi$ t.j. równanie odniesione do kierunków średnicy i stycznej ~~prostopadłej~~.

Wiemy z ogólnej teoryi że wszystkie średnice równoległe i że ~~w~~ jedną

~~punkt~~ będzie położenie średnicy takie że ~~można wykreślić styczną~~ cięciwy do niej należące będą prostopadłe.

To obierzemy jako oś X, a styczną jako Y.

Wtedy do X należą równe i przeciwne wartości y, zatem $a_{23}=0$, $\alpha=0$

a ponieważ krzywa będzie przechodziła przez środek współrzędnych to i $a_{33}=0$

Zatem $y^2 = 2px$ ogólne równanie, które z tamtych formy można by

otrzymać przez stosowne przekształcenie.

Widzimy że to równanie także otrzymuje się z równania El. i Hyp. jeżeli $a = \infty$

więc ~~[illegible]~~ $\frac{e}{a} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{p}{a}} = 1$, $\varepsilon = 1$

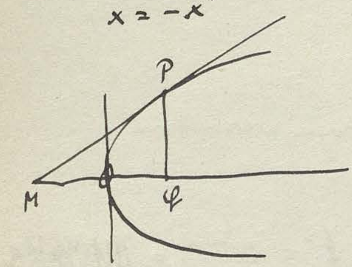
styczna do paraboli w punkcie (x,y):

$yy' = p(x+x')$ Więc przecięcie z osią OX w punkcie

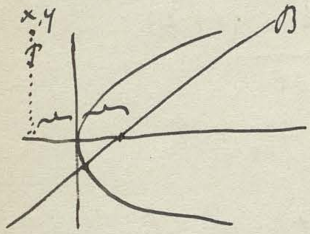
$x = -x'$

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{p}{y}$

$OM = -O\varphi$



Tak samo także jeżeli to uważamy jako równanie biegunowej



Punkty przecięcia: $\left.\begin{array}{l} yy' = p(x+x') \\ y'^2 = 2px' \end{array}\right\}$

$$y'^2 - 2yy' = -2px$$

$$y' = y \pm \underbrace{\sqrt{y^2-2px}}_{>0 \text{ dla punkt. zewn.}}$$

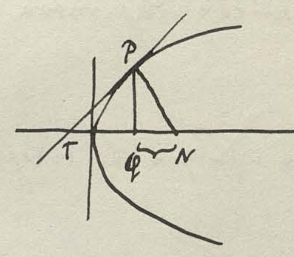
Normalna: $y - y' = -\frac{y}{p}(x-x')$

$$p(y-y') + y(x-x') = 0$$

Przecięcie z osią X: $py + y(x-x') = 0$

$$x' = p + x$$

$$x' - x = p = \varphi N$$



Przez punkt dowolny można wykreślić 3 normalne, bo:

$\left.\begin{array}{r} p(y-y') + y(x-x') = 0 \\ y^2 = 2px \end{array}\right\} 2p^2(y-y') + y^3 - yx' = 0$ z równania 3go stopnia w y

Punkt leżący w odległości $\frac{p}{2}$ jest zawsze środkiem między N i T bo

$x+\frac{p}{2} = (x+p) - \frac{p}{2}$; nazywamy go ogniskiem

[crossed out] możemy tutaj bezpośrednio użyć [crossed out] określenia zapomocą własności harmonicznych bo drugi leży w ∞

$\frac{N\infty}{T\infty} = -\frac{NF}{TF} = -1$ więc odpowiada ten punkt twym warunkom

Także z tego że $\varepsilon = 1$, bo mamy przy elipsie $p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-e^2}{a} =$ [crossed out]

$$= \underbrace{(a-e)}_{OF}(1+\varepsilon)$$

$$OF = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{p}{2}$$

$$r = \sqrt{y^2+\left(x-\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{2px + x^2 - px + \frac{p^2}{4}} = x+\frac{p}{2} \quad = \left[\frac{p}{2} + r\cos\varphi\right] + \frac{p}{2}$$

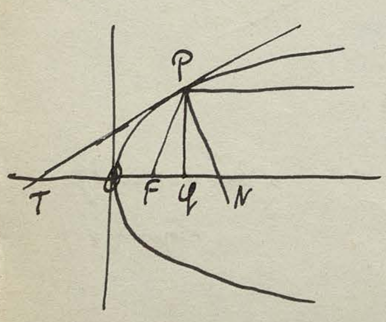
$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ co także z dawniejszych równań wypływa.

Kierownica = biegunowa ogniska $yy' = p(x+x')$

$$\sout{yy'} = \sout{px+\frac{p^2}{4}} \quad \frac{p^2}{2} + px' = 0$$

$$x' = -\frac{p}{2}$$

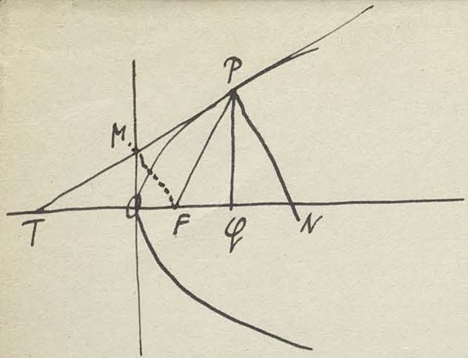
Z tego wypływa że odległość jakiegoś punktu od F = odległości od kierownicy



więc także TF = FP więc trójkąt równo

więc kąt FTP = FPT więc styczna i normalna

tworzą równe kąty z osią X i z r



$FM \perp TP$!

$TF = FN \quad MF \parallel PN$

$\therefore TM = MP$

$TO = O\varphi$ $\}$ ∴ punkt M ciągle na Y osi.

więc owe koło na którym leżą ~~punkty~~ spodki prostopadłych zastąpione przez ↑.

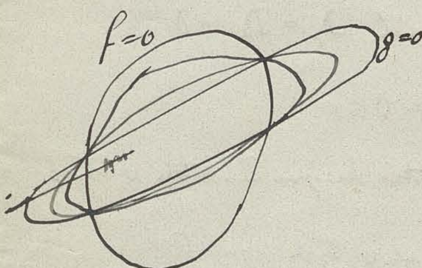
kąt zawarty między dwoma stycznemi = $\frac{1}{2}$ kąta zawartego między prostemi wykreślonemi do punktów styczności, bo $\varphi FP = 2\, FTP$

Więc jeżeli 2 styczne do siebie prostopadłe, to punkty styczności muszą leżeć na prostej przechodzącej przez F; takie styczne przecinają się jednak w biegunie należącym do tej prostej, a ten musi leżeć na biegunowej punktu F t.j. na kierownicy, więc miejsce geometryczne punktu z którego można wykreślić dwie styczne prostopadłe do siebie = z kierownicą. (Naturalnie i bezpośredni dowód możliwy).

Kilka pojęć z układów krzywych II.

2 krzywe II przecinają się w 4 punktach rzecz. albo uroj. ponieważ równanie 4 stopnia.

Rzędzie istnieje ∞ wiele krzywych przechodzących przez 4 punkty bo do zupełnego oznaczenia potrzebaby 5 punktów.



Każda krzywa $f+\lambda g=0$

przechodzi przez te 4 punkta przecięcia

zatem jeśli λ coraz inne wartości : pęk krzywych II

4 wierzchołki pęku

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$g = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy \ldots$$

Bardzo wygodnie taki symbolizm oznaczeń n. p.

Biegunowe wszystkich krzywych pęku przechodzą przez jeden punkt.

Biegunowa krzywej $f+\lambda g =$

$$(a_{11}+\lambda b_{11})x^2 + 2(a_{12}+\lambda b_{12})xy + \ldots$$

$$(a_{11}+\lambda b_{11})xx' + (a_{12}+\lambda b_{12})(xy'+x'y) + \ldots$$

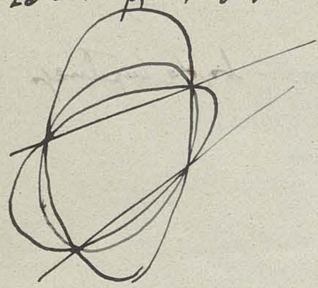
$$= \underbrace{a_{11}xx' + a_{12}(x'y+xy') + \ldots}_{B_1} + \lambda\underbrace{\left[b_{11}xx' + b_{12}(xy'+y'x) + \ldots\right]}_{B_2}$$

zatem tworzą one pęk promieni przechodzących przez punkt przecięcia $(B_1\ B_2)$

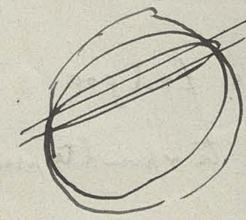
Jeżeli g można rozłożyć w iloczyn dwóch wielomianów I wtedy rozpada się ono w 2 proste $g = D_1 D_2$

zatem pęk krzywych II przez f i $D_1 D_2$:

$$f + \lambda D_1 D_2 = 0$$



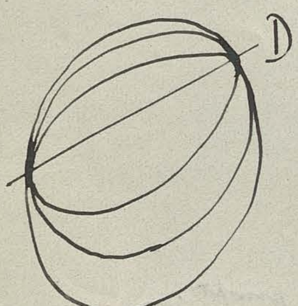
Teraz jeżeli D_1 i D_2 coraz więcej się zbliżają



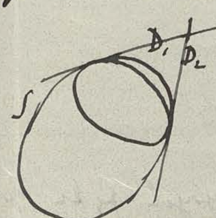
wreszcie jeżeli $D_1 = D_2 = D$

$$f + \lambda D^2 = 0$$

oznacza wszystkie krzywe II które w tych dwóch punktach mają podwójny punkt przecięcia = styczne w tych punktach.

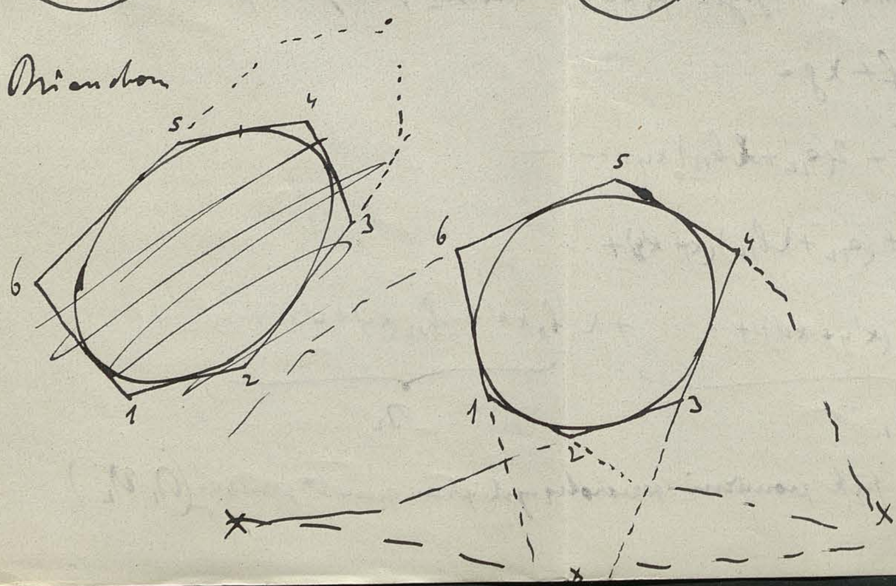


A jeżeli $D_1 = S_1$ styczna i $D_2 = S_2$ styczna do f to

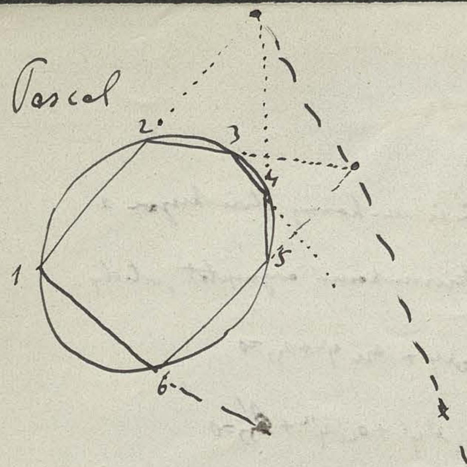


$$f + \lambda D_1 D_2 = 0$$

Brianchon

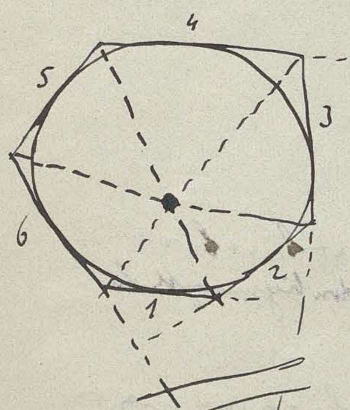


Pascal



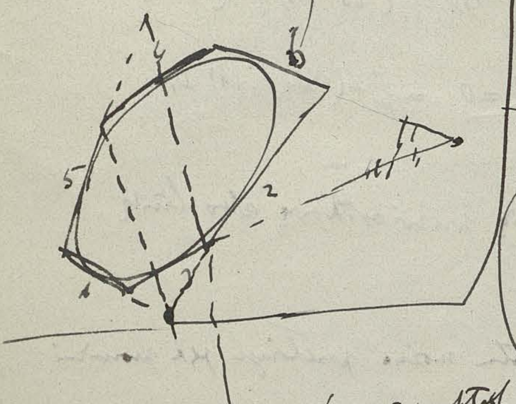
3 punkty leżą na prostej

Brianchon



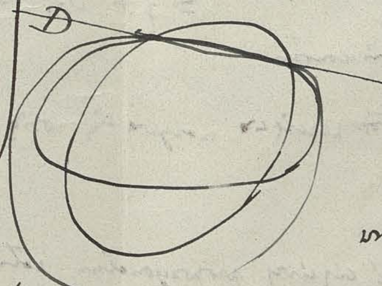
3 proste przecinają się w jednym punkcie

ale ponadto dowolny



Inne rodzaje układów

dwuwierzchołkowy gdzie każdy przez 2 punkty



$f + D D_i = 0$

jeśli D_i – wyrażenie I stopnia

wszystkie będą przechodziły

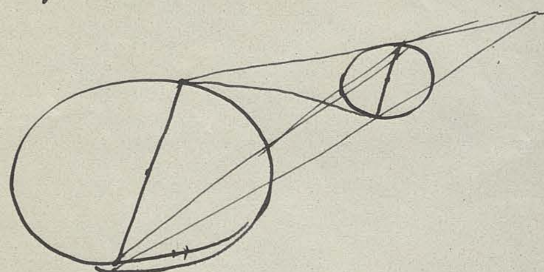
przez (f D) || oś układu

a każde 2 krzywe znów w 2 punktach

= oś drugą ~~ich~~ tych dwóch kr..

Inny rodzaj układów:

Krzywe homotetyczne = podobne i podobnie położone



Dajmy na to że mamy dwie krzywe z równymi kierunkami asymptot, wtedy

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$

$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + b'_{33} = 0$

więc jeśli $x = r\cos\varphi$, $x' = r'\cos\varphi$ } to $r^2 : r'^2 = a_{33} : a_{33}$

zatem średnice równoległe są proporcjonalne

a w odniesieniu do tego samego układu: $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_{13}x + b_{23}y + b_{33} = 0$

Można je uważać jako specjalny przypadek układów dwubiegunowych bo

~~$f + (b'_{33} - a_{33})$~~ równanie $= f + (b_{13} - a_{13})x + (b_{23} - a_{23})y + (b_{33} - a_{33})$

$= f + D_i . 1 = 0 = f + (0x + 0y + 1)D_i$

więc oś = prosta w nieskończoności

oś druga = ~~oś~~ oś punktów przecięcia naszych osią pierwiastkową albo linią potęgową, albo cięciwą

Naturalnie i jakiekolwiek cięciwy proporcjonalne, zatem można przełożyć przez promienie i otrzymać 2 środki podobieństwa.

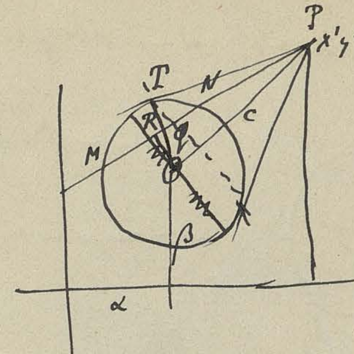
To by zarazem punkty z których można równocześnie wykreślić styczne do obu krzywych

Jeśli ~~..~~ spółśrodkowe homotetyczne to tylko a_{33} różne

Równanie koła: $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+r=0$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

$$\rho^2=\alpha^2+\beta^2-r$$



Styczna: $xx'+yy'-\alpha(x+x')-\beta(y+y')+r=0$

= Biegunowa

$x'\,y'\}$ = Biegun

Łącznica bieguna ze środkiem ma kierunek $\operatorname{tg}\psi=\frac{y'-\beta}{x'-\alpha}$

Tamto równanie

$x(x'-\alpha)+y(y'-\beta)+r=0$ więc $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x'-\alpha}{y'-\beta} = -\operatorname{tg}\psi$

więc są one prostopadłe do siebie co naturalnie wynika także z symetryi

Biegunową określaliśmy przez jej własności harmoniczne

Także i tutaj musi: $\frac{MQ}{NQ}=-\frac{MP}{NP}$

$MP = PR + MR$

$NP = PR - MR$ $\Big\}$ $\overline{MP}\cdot\overline{NP}=(PR)^2-(MR)^2$ $\quad MR^2=\rho^2-(OR)^2$

$$\overline{MP}\cdot\overline{NP}=PR^2-\rho^2+OR^2 = OP^2-\rho^2=T^2$$

Także tak:

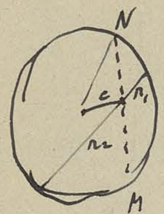
Równanie biegunowe: $x=r\cos\varphi$ $\quad y=r\sin\varphi$

$r^2-2r(\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)+r=0$ / jeżeli jeszcze $\alpha=c\cos\gamma$ | $\beta=c\sin\gamma$

$r^2-2rc\cos(\varphi-\gamma)+r=0$ Więc iloczyn $r_1 r_2=r=c^2-\rho^2$

a ponieważ można każdy punkt zrobić początkiem

Tożsamo naturalnie dla punktów wewnętrznych



$$r_1 r_2 = \rho^2 - c^2 = \left(\frac{1}{2} MN\right)^2$$

To nazywamy potęgą punktu względem koła $= \Pi$

$\Pi = c^2 - \rho^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - \rho^2 =$ Równanie koła jeżeli tam wstawimy $x_0\, y_0$

Zatem Równanie koła $\Pi = 0$

Miejsce geometryczne [dwuch kół] równych potęg względem

$\Pi_1 = 0 \qquad \Pi_2 = 0$

$\Pi_1 = \Pi_2$ albo $\Pi_1 - \Pi_2 = 0 \equiv (x_1 - \alpha_1)^2 + (y_1 - \beta_1)^2 - \rho_1^2 - \left[(x_1 - \alpha_2)^2 + (y_1 - \beta_2)^2 - \rho_2^2\right]$

$= 2(\alpha_2 - \alpha_1)x + 2(\beta_2 - \beta_1)y + \pi_1 - \pi_2 = 0 \quad$ = prosta

= linia potęgowa = oś pierwiastkowa ; własciwość że styczne z jakiegoś punktu równe.

Łącznica środków kół : $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$ więc prostopadła do linii (osi) potęgowej

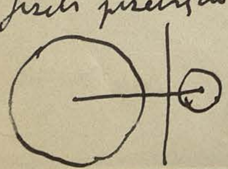
Punkt przecięcia dwuch kół: potęga jego $= 0$ wobec każdego z nich

zatem jeżeli koła przecinają się to oś przechodzi przez punkty przecięcia

Teraz przypominamy sobie że w układach homotetycznych napotkaliśmy na

to samo (określenie) wyrażenie ; dwa środki koła zawsze homotetyczne.

Jeżeli przecięcie urojone:



$$c_1^2 - \rho_1^2 = c_2^2 - \rho_2^2$$

$$c_1^2 - c_2^2 = \rho_1^2 - \rho_2^2 \quad \text{oznacza położenie przecięcia}$$

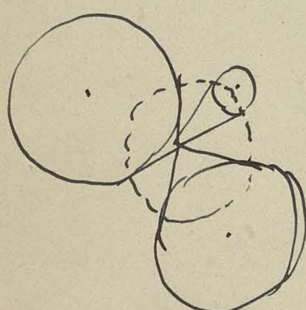
Trzy koła.

Osi każdej pary z nich:

$\Pi_1 - \Pi_2 = 0$
$\Pi_2 - \Pi_3 = 0$
$\Pi_3 - \Pi_1 = 0$

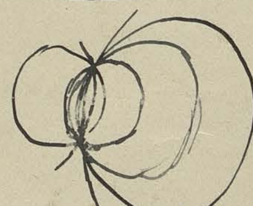
} więc muszą przechodzić przez jeden punkt = środek pierwiastkowy = punkt z którego trzy równe styczne

zatem punkty styczności muszą leżeć na obwodzie koła (głównego)



To zarazem rozwiązanie zadania „wykreślić koło które przecina prostopadle trzy dane koła".

$\Pi_1 = 0 \quad \Pi_2 = 0$



$\Pi_1 + k\Pi_2 = 0$

pęk kół przechodzących przez te dwa ~~punkty~~ punkty; oś pierwiastkowa = łącznica wierzchołków i linia spółśrodkowa jest wszystkim kołom wspólna

$\Pi_1 + k\Pi_2 = (\Pi_1 - \Pi_2) + (k+1)\Pi_2$
oś pierwiastkowa

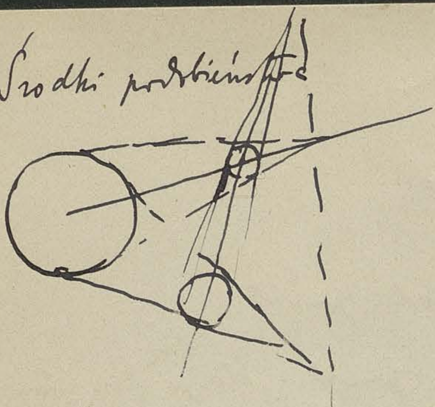
więc wszystkie koła mają wspólną oś pierwiastkową tworzą pęk.

Biegunowe wszystkich kół względem pewnego punktu przecinają się w jednym punkcie

$(1+k)(xx'+yy') - (\alpha_1 + k\alpha_2)(x'+x) - (\beta_1 + k\beta_2)(y'+y) + \pi_1 + k\pi_2 = 0$

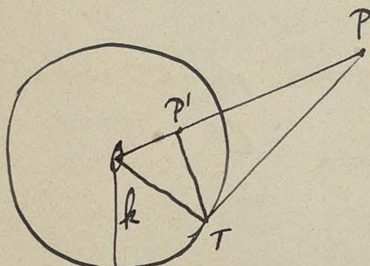
$= P_1 + kP_2$

Środki podobieństwa



leżą na prostych = osiach podobieństwa

Inwersya zapomocą odwrotnych promieni wodzących



$$rr' = k^2$$

$$\vartheta = \vartheta'$$

$$x : y = x' : y' = .$$

$$x = y\frac{x'}{y'} = \frac{r}{r'}x' = \frac{rr'}{r'^2}x' = \frac{k^2 x'}{x'^2+y'^2}$$

$$x' = \frac{k^2 x}{x^2+y^2}$$

$$y' = \frac{k^2 y}{x^2+y^2}$$

Każdemu punktowi wewnętrznemu odpowiada jeden zewnętrzny z wyjątkiem środka

---

więc $OP' \cdot OP = OT^2$

$$\frac{OP'}{OT} = \frac{OT}{OP}$$

wykreślenie zapomocą Δ ; P'T jest biegunową

---

k można przyjąć = 1 ponieważ to tylko odnosi się do jednostki mierzenia

Jeśli P opisuje krzywą to także P' będzie opisywało krzywą

N.p. $\Pi = x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\kappa=0$

$$\frac{x'^2+y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} - \frac{2(\alpha x'+\beta y')}{x'^2+y'^2} + r = 0 = \frac{1-2\alpha x'-2\beta y'}{x'^2+y'^2} + r$$

$$x'^2+y'^2 - \underset{2\alpha'}{\frac{2\alpha}{r}}x' - \underset{2\beta'}{\frac{2\beta}{r}}y' + \frac{1}{r} = 0$$ więc znowu koło

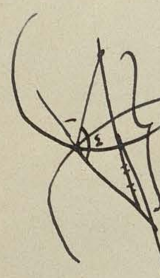
$\alpha' = \frac{\alpha}{r}$ $\quad \beta' = \frac{\beta}{r}$ | $r' = \frac{1}{r}$ $\qquad \rho'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - \ldots = \frac{\rho^2}{r^2}$

[więc środek nie jest odwrócony bo stąd musiałby być $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$]

Prostej odpowiada koło: $Ax+By+C=0$

$$Ak^2x' + Bk^2y' + C(x'^2+y'^2) = 0$$ więc koło przechodzące przez O

a odwrotnie każdemu kołu przechodzącemu przez O odpowiada prosta



$$(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2 = \rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\varepsilon$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-(\alpha_1-\alpha_2)^2-(\beta_1-\beta_2)^2+\rho_1^2+\rho_2^2}{2\rho_1\rho_2}$$

A w figurze odwrotnej otrzymamy wyrażenie zupełnie analogiczne:

$$\cos\varepsilon' = \frac{\rho_1'^2+\rho_2'^2-(\alpha_1'-\alpha_2')^2-(\beta_1'-\beta_2')^2}{2\rho_1'\rho_2'}$$ a wkładając powyższe wyrażenia

otrzymuje się to samo $\cos\varepsilon$ zatem $\varepsilon = \varepsilon'$

równokątne przedstawienie

~~$V_0 = \alpha^2 \left(y_0 - \frac{w^2 a^2}{2g} \right) - \int_0 x\,dx \left(y_0 - \frac{w^2 x^2}{2g} \right)$~~

$\Pi_1 = 0 \quad \Pi_2 = 0 \quad \Pi_3 = 0$

$\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3 = 0$ = sieć kół

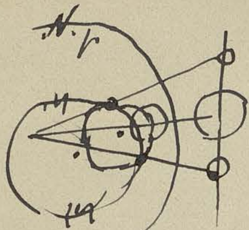
$$\alpha = \frac{\alpha_1 + k\alpha_2 + l\alpha_3}{1+k+l} \qquad \beta = \frac{\beta_1 + k\beta_2 + l\beta_3}{1+k+l}$$

Środek prostokątny tych trzech danych kół jest ten gdzie $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3$

więc tam także $\Pi = \dfrac{\Pi_1 + k\Pi_2 + l\Pi_3}{1+k+l} = \Pi_1$

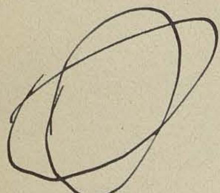
więc wszystkie koła sieci mają wspólny środek prostokątny t. j. wszystkie

muszą przecinać $\perp$ koło główne; więc sieć = układ kół $\perp$ do —



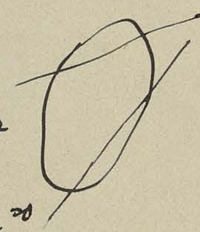
więc musi istnieć koło przecinające 3 dane koła ⊥
(= ćwiczenie pierwiastki)

Wróćmy jeszcze do pęków krzywych II:



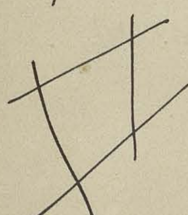
$$f + \lambda g = 0$$

Ten sam system krzywych także przez



$$f + \lambda D_1 D_2 = 0$$

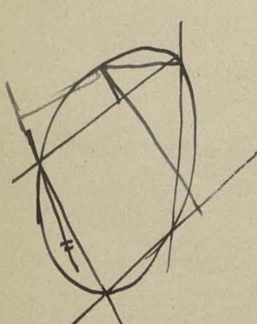
Albo przez

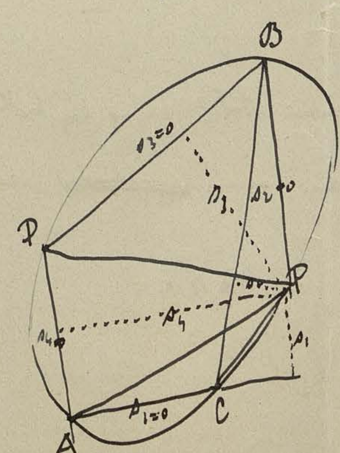


$$D_1 D_2 + \lambda D_3 D_4 = 0$$

więc każde równanie krzywej II w tej formie

D można także uważać jako odstępy jakiegoś punktu od prostej





$$\delta_1 AC = PA.PC.\sin APC$$

$$\delta_2 BC = PB.PC.\sin BPC$$

$$\delta_3 BD =$$

$$\delta_4 AD =$$

$$\frac{\sin APC}{\sin BPC} : \frac{\sin APD}{\sin BPD} = \frac{\delta_1 \delta_3}{\delta_2 \delta_4} \cdot \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

$$= \lambda \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}$$

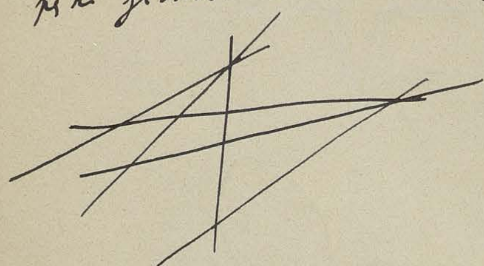
więc i odwrotnie miejsce geometryczne punktu którego łączenie z 4 punktami mają

stały stosunek podziału podwójnego

---

wś podobnego możliwiny jest dalszej

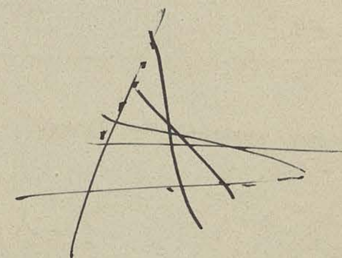
pęki prostych jednokreślne



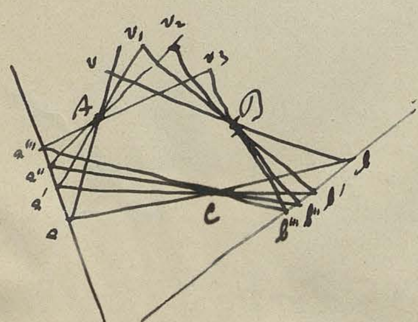
$$S_1 - \lambda S_2 = 0$$

$$S_1' - \lambda S_2' = 0$$

$$S_1 S_2' - S_1' S_2 = 0$$



Mac Laurin

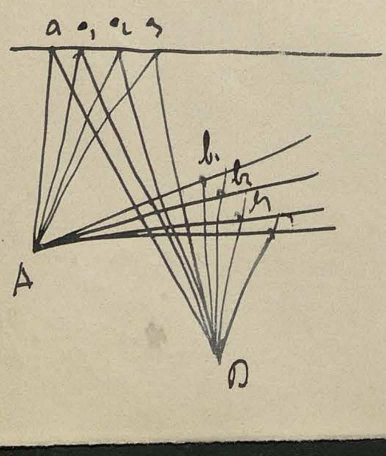


$A(v\, v_1\, v_2\, v_3) =$

$A(a\, a_1'\, a_2''\, a_3) = (C\ a\, a_1\, a_2\, a_3) = (C\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4)$

$= (B\ b_1\, b_2\, b_3\, b_4) = (B\ v\, v_1\, v_2\, v_3)$

Newton



2 kąty wielkości stałej kręcą się koło wierzch.

tak że jedno ramię ~~posuwa się~~ przecina się na prostej

$(A\ a\, a_1\, a_2\, a_3) = (B\ a\, a_1\, a_2\, a_3)$

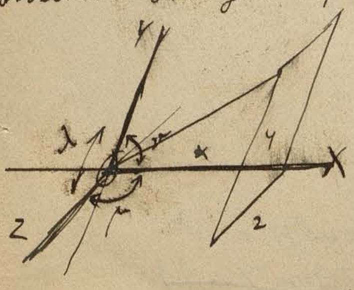
$= (B\ b_1\, b_2\, b_3) = - -$

Styczne:

$$a_{11} x x' + 2a_{12}(x y' + x' y) + \ldots = 0$$

2 wartości $x\ y$ jeśli $x' y'$ stałe więc równanie w współrzędnych punktu musi być 2go stopnia. więc krzywa klasy 2ej

Geometrya przestrzenna. Szczególnej doniosłości ze względu na zastosowania mianowicie fizykę, bo w przestrzeni odbywają się wszystkie zjawiska fizyczne. Pod względem matematycznym jest to tylko specyalny przypadek geometryi n-wymiarowej (Lobatschefskyj, Gauss, Bolyai, etc.), utworzonej per analogiam; ale praktycznego zastosowanie ~~ma~~ ~~ma~~ ma tylko przypadek n=3 i czasem n=2. Często słyszy się o przestrzeni 4 wymiarowej twierdząc że nie możemy wiedzieć czy nie żyjemy w takiej . . Np. skorpion książkowy może mieć tylko ~~…~~ pojęcie o przestrzeni (wielokrotności) 2 wymiarowej albo raczej płaszczyzny. Może i u nas tak samo? Naturalnie jest to możliwe (i nigdy niesprzeczne niczemu), ale pytanie czy wchodziłyby te wymiary (n-3) w nasze rozważania? Jak długo skorpion żyje w książce między (drewnianemi) kartkami to go nic nie obchodzi że istnieją jeszcze inne, dopiero wtedy by się to stało ważnem ~~przez~~ to gdyby dostał się do przestrzeni wolnej. (Istnienie 3 wymiaru) Okazałoby się przez to że przedmioty znikają i powstają, że z jednego miejsca przenoszą się na drugie nie przechodząc przez miejsca pośrednie. Tak samo ~~musiałoby~~ i u nas nastąpić gdyby 4 wymiar odgrywał rolę. Ale właśnie najfundamentalniejsze prawo przyrody: zachowania materyi, więc ~~…~~ jeśli istnieją inne wymiary, albo może nawet istoty które mają zmysły odpowiednie to dla nas tylko 3 wymiary wchodzą w rachubę; reszta – jeśli istnieje – nic nas nie obchodzi. Ale jak wspomniałem pod względem matematycznym można [illegible].

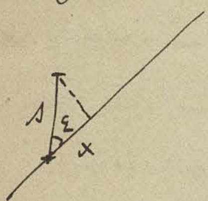


Poł. Punkt określić można przez długości, boków równoległościanu

Przedewszystkiem ~~...~~ zasady

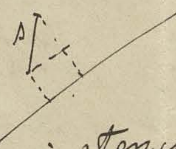
Długość rzutu odcinka prostej na oś = długość × cos kąta ...

Jeśli wspólny początek to jest to rzecz zupełnie naturalna

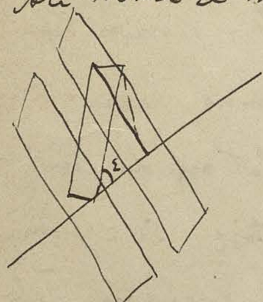


$x = s\cos\varepsilon$

Tak samo jeśli początek nie wspólny ale jeśli leżą w tej samej płaszczyźnie



Ale także że nie w tej samej płaszczyźnie, t.j. jeśli skośnie..

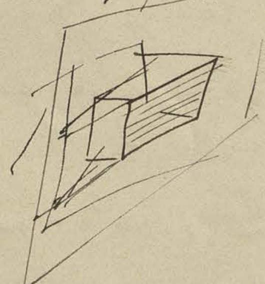


Co wtedy rozumieć należy pod kątem zawartym między

Przesuniemy prostą równolegle ~~...~~ t.j. prostopadle do osi aż początek wspólny, wtedy jak przedtem

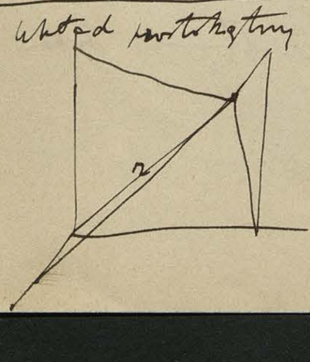
Więc ogólnie.

Tak samo, naturalnie mówiąc, ~~...~~ rzut ~~...~~ figury płaskiej na płaszczyznę = polu jej × cos kąta



bo utworzymy ślad płaszczyzny II na I i rozłożymy ~~...~~ figurę przez prostopadłe do tego śladu.

Układ prostokątny



Więc $x = r\cos\alpha$

$y = r\cos\beta$

$z = r\cos\gamma$

$$x^2+y^2+z^2 = r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) = r^2$$

więc $\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1}$

Odległość między 2 punktami

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \varepsilon$$

$$= \underbrace{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}_{= r_1^2} + \underbrace{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}_{= r_2^2} - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) =$$

$$r_1 r_2 \cos \varepsilon = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)$$

$$\boxed{\cos \varepsilon = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2}$$

$$\sin^2 \varepsilon = 1 - \cos^2 \varepsilon$$

$$= (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) -$$

$$- (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)^2$$

$$= \cos^2\alpha_1 \cos^2\beta_2 + \cos^2\alpha_1 \cos^2\gamma_2 - 2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\beta_1 \cos\beta_2 -$$

$$+ \cos^2\alpha_2 \cos^2\beta_1 + \cos^2\alpha_2 \cos^2\gamma_1 \quad - 2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \quad + \dots$$

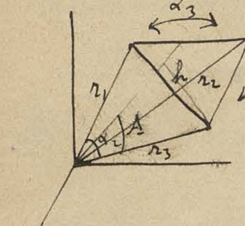
$$\boxed{\sin^2 \varepsilon = [\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\alpha_2 \cos\beta_1]^2 + [\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\beta_2 \cos\gamma_1]^2 + [\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 \dots]^2}$$

więc zachodzi $1 \perp 2$ $\boxed{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \text{———} = 0}$

$1 \parallel 2$ $\quad \sin \varepsilon = 0 \quad : \quad \cos\alpha_1 \cos\beta_2 = \cos\alpha_2 \cos\beta_1$ etc.

$$\alpha_1 = \alpha_2 \dots$$

Czworościan



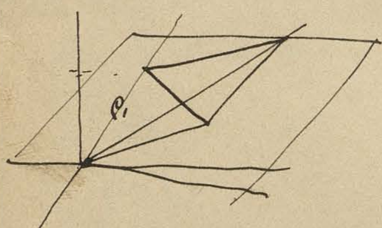
$$A(r_1 r_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\alpha_3$$

$$h = r_3 \sin A$$

$$V = \frac{1}{6} r_1 r_2 r_3 \sin\alpha_3 \sin A$$

więc jeżeli kierunki krawędzi niezmienione to zależy tylko od długości $r_1 r_2 r_3$

Teraz użyjemy pewnej sztuczki: utworzymy sobie inny czworościan o tych samych kierunkach krawędzi przecinając je w stosownej odległości przez płaszczyznę równoległą z XV, o tej samej objętości



aby objętość była taka sama musi być $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = r_1 r_2 r_3$

do tego: $\rho_1 : \xi_1 = r_1 : x_1 \quad \rho_1 : \eta_1 = r_1 : y_1$ — —

$\rho_2 : \xi_2 = r_2 : x_2$ — —

— — —

Teraz objętość tego nowego walca $= \frac{1}{6}$ podstawa $\times$ wysokość $= \xi_1$

wysokość $= \xi_1 = \xi_2 = \xi_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} =$$

$$V = \frac{1}{6} \xi_1 (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) + \xi_2 (\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3) + \xi_3 (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$$

$$\xi_1 = \frac{z_1 \rho_1}{r_1} \qquad \xi_2 = \frac{x_2 \rho_2}{r_2} \qquad \eta_3 = \frac{y_3 \rho_3}{r_3}$$

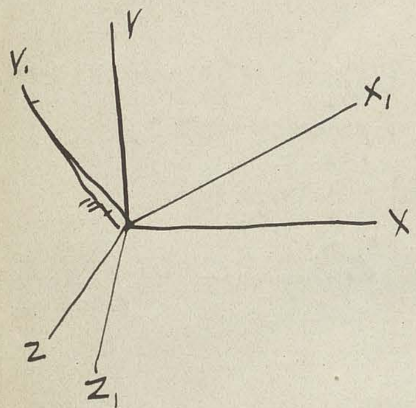
$$V = \frac{1}{6} \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{r_1 r_2 r_3} \left[z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots \right]$$ a ponieważ $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = $ — —

$$= \frac{1}{6} \left[z_1 [\; \dots \;] \right] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

A jeżeli kąt nie w początku 0 to

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} z_1 - z_4 & x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \\ z_2 - z_4 & x_2 - x_4 & \text{"} \\ z_3 - z_4 & x_3 - x_4 & \text{"} \end{vmatrix} \; . =$$

Zanim o tem dalej postępujemy wróćmy do układu spółrzędnych i postawmy sobie zadanie ~~ważne~~ które w fizyce będziemy napotykać: zmiana układu spółrzędnych:



Obydwa ⊥

9 kątów, lecz nie (całkiem) dowolnych, bo muszą istnieć warunki:

$$\begin{cases} \cos XX_1 \cos XY_1 + \cos YX_1 \cos YY_1 + \cos ZX_1 \cos ZY_1 = 0 \\ \cos XY_1 \cos XZ_1 + \cos YY_1 \cos YZ_1 + \cos ZY_1 \cos ZZ_1 = 0 \\ \cos XZ_1 \cos XX_1 + \cos YZ_1 \cos YX_1 + \cos ZZ_1 \cos ZX_1 = 0 \end{cases}$$

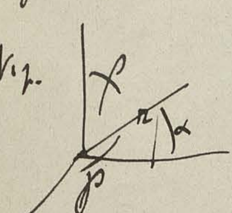
$$\begin{cases} \cos XX_1^2 + \cos YX_1^2 + \cos ZX_1^2 = 1 \\ \cos XY_1^2 + \cos YY_1^2 + \cos ZY_1^2 = 1 \\ \cos XZ_1^2 + \cos YZ_1^2 + \cos ZZ_1^2 = 1 \end{cases}$$

Więc dowolne są tylko 3 wielkości:

Jak się przemienia jedne na drugie?

Długość prostej = Summa rzutów na 3 osi postoj. pomnożonych przez cos..

Np.



$$\begin{aligned} m &= r \cos\alpha \\ n &= r \cos\beta \\ q &= r \cos\gamma \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\cos\alpha \\ &\cos\beta \\ &\cos\gamma \end{aligned} \right\} \quad r = m\cos\alpha + n\cos\beta + q\cos\gamma$$

Więc tutaj:

$x_1 = x \cos XX_1 + y \cos YX_1 + z \cos ZX_1$ | $x = x_1 \cos XX_1 + y_1 \cos XY_1 + z_1 \cos XZ_1$

$y_1 =$ | — —

$z_1 =$ | — —

Teraz wróćmy do rozważania

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & x_2 - x_4 & x_3 - x_4 \\ y_1 - y_4 & y_2 - y_4 & \vdots \\ z_1 - z_4 & z_2 - z_4 & \vdots \end{vmatrix}$$

współrzędne punktów 1, 2, 3 tylko w pierwszej potędze, a z powodu symetrii tak samo i 4, (wyższe potęgi muszą się znieść) (dokładnie zobaczymy później że można je przemienić w

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Więc będzie to wyrażenie kształtu

$$V = A x_1 + B y_1 + C z_1 + D$$

Jeśli to $= 0$ to będzie warunek żeby x_1 leżało w płaszczyźnie 2, 3, 4, zatem równanie płaszczyzny: $Ax + By + Cz + D = 0$

Także w inny sposób: wykreślimy sobie prostopadłą z O na płaszczyznę i przedłużymy aż do podwójnej długości; wtedy każdy punkt płaszczyzny musi mieć równy odstęp od O i od tego punktu (a, b, c)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$$

zatem równanie: $ax + by + cz - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 0$

a wprowadzając odstęp p i kąty $\lambda\ \mu\ \nu$

$$a = 2p\cos\lambda$$
$$b = 2p\cos\mu$$
$$c = 2p\cos\nu$$

$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu - p = 0$ (= forma normalna)

[Analogia z równaniem prostej w płaszczyźnie, faktycznie jeśli założymy że $\nu = 90^\circ$: $x\cos\lambda + y\cos(90 - \lambda) - p = 0$]

Dzieląc przez p:

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\lambda}} + \frac{y}{\frac{p}{\cos\mu}} + \frac{z}{\frac{p}{\cos\nu}} - 1 = 0 \quad \| \quad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{q} = 1$$ (forma symetryczna)

Ogólną można zawsze przemienić w normalną :

$$kA = m\lambda \quad \Big| \quad ()^2$$
$$kB = m\mu \quad \Big| \quad ()^2$$
$$kC = m\nu \quad \Big| \quad ()^2$$
$$kD = -p$$

$$k^2\left[A^2+B^2+C^2\right] = 1$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{}} = 0$$

a w symetryczną dzieląc przez D: $\frac{D}{A} = m$ etc.

$Ax+By+Cz=0$ przechodzi przez punkt O

$Ax+By+D=0$ z dowolne więc równoległa do osi Z

$Ax+Cz+D=0$ " Y

$By+Cz+D=0$ " Z

$Ax+D=0$ prostopadła do X

---

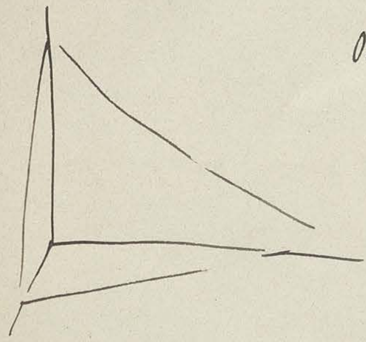
oznaczając $m = -\frac{1}{u}$ $n = -\frac{1}{v}$ $p = -\frac{1}{w}$ współrzędne stanowiące

otrzymamy równanie $ux+vy+wz+1=0$

dając im wszystkie wartości a utrzymując x y z stałe = równanie punktu

$F(x\,y\,z)=0$ ~~płaszczyzna~~ powierzchnia rzędu n

$F(u\,v\,w)=0$ klasy n obwiednia układu płaszczyzn



Odległość punktu x y z od płaszczyzny $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

$x\cos\alpha + \dots - p' = 0$

$\delta = p' - p = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$

w ogólnej formie $\delta = \dfrac{Ax'+By'+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

u, v, w $\delta = \dfrac{ux'+vy'+wz'+1}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}} = \dfrac{E}{\sqrt{\ }}$

Kąt między dwiema pł. = kąt między prostopadłymi.

$Ax+By+Cz+D=0$ $A'x+B'y+C'z+D'=0$

$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$

$= \dfrac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}$

$\perp$ $AA'+BB'+CC'=0$

$\parallel$ $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}$

$E_1 = u_1x+v_1y+w_1z+1=0$ $E_2 = u_2x+v_2y+w_2z+1=0$

$E_1+\lambda E_2 = (u_1+\lambda u_2)x + \dots = 0$ przechodzi przez prostą przecięcia

$\lambda = -\dfrac{E_1}{E_2} = -\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\dfrac{\sqrt{u_1^2+\dots}}{\sqrt{u_2^2+\dots}} = \pm\dfrac{\sqrt{u_1^2+\dots}}{\sqrt{u_2^2+\dots}}\,\dfrac{\sin E_1E}{\sin EE_2}$

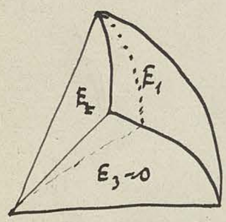
$P_1 \equiv x_1 u + y_1 v + z_1' w + 1 = 0 \parallel P_2 - -$

$P_1 + \lambda P_2 = (x_1 + \lambda x_2) u + - - \quad + (1+\lambda) = 0$

$x = \dfrac{x_1 + \lambda x}{1+\lambda}$ $\qquad \lambda = \dfrac{P_1 P}{P P_2}$

Jeżeli 3 płaszczyzny albo 3 punkty $R_1 R_2 R_3 = 0$ i te przecinają się w jednej prostej albo leżą na 1 prostej to muszą istnieć takie $k_1 k_2 k_3$ że

$R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3 \equiv 0$



$E_{12} \equiv E_1 - E_2 = 0 \qquad E_{12}' \equiv E_1 + E_2 = 0$

$E_{23} \equiv E_2 - E_3 = 0$

$E_{31} \equiv E_3 - E_1 = 0$

$= 0 \qquad = 0$

~~przechodzą~~ dwusieczne pł. kątów dwuściennych kąta bryłowego trójściennego przechodzą po 3 przez 1 prostą.

W podobny sposób można także pokazać że dwusieczne płaszczyzny boków i że prostopadłe płaszczyzny na 3 strony przecinają się w 1 punkcie (analogia z geometrią płaską i trójkątem).

Jeżeli 4 płaszczyzny przechodzą przez 1 prostą:

$E_1 \quad E_2 \quad \underset{E_3}{E_1 - \lambda E_2} \quad \underset{E_4}{E_1 - \kappa E_2}$ to nazywamy stosunek

$$\frac{\sin E_1 E_3}{\sin E_3 E_2} : \frac{\sin E_1 E_4}{\sin E_4 E_2} = \frac{\lambda \sqrt{-}}{\kappa \sqrt{-}} = \frac{\lambda}{\kappa}$$

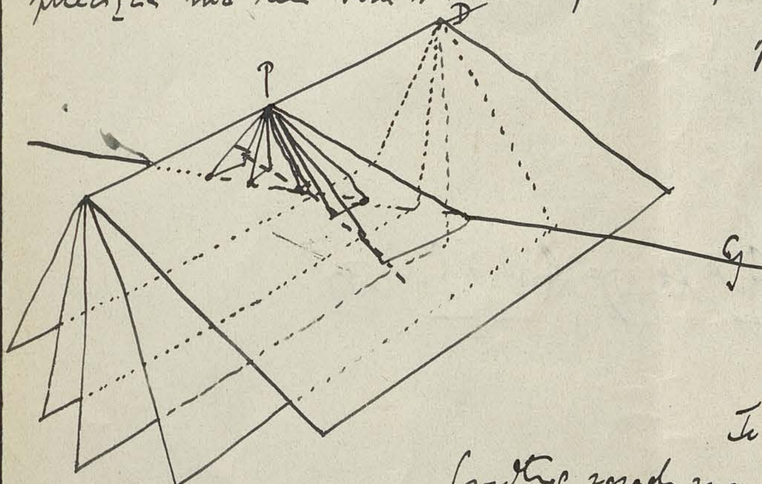
stosunkiem podziału podwójnego.

Tak samo jeśli 4 punkty na prostej to

$(P_1 P_2 P_3 P_4) \ldots = \frac{P_1 P_3}{P_3 P_2} : \frac{P_1 P_4}{P_4 P_2}$

Pęk płaszczyzn = zbiór płaszczyzn przechodzących przez prostą, szereg punktów = zbiór punktów leżących na ~~tej~~ prostej.

Jeśli jakąś bądź prostą G poprzeczną przetniemy pęk płaszczyzn, to szereg punktów przecięcia ma ten sam stosunek podziału podwójnego.



przez G prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do D

wreszcie w punkcie P prostopadłą do D

i rzucimy szereg punktów ~~z~~ G na tę płaszczyznę.

To daje ten sam stosunek podziału (według zasady znanej z geometrii płaskiej) więc i tutaj...

---

2 pęki płaszczyzn $E_1 - \lambda E_2$ $E_1' - \lambda E_2'$ nazywamy jednokreślnymi[7]

jeśli te same λ :

Miejsce geometryczne ich przecięcia = powierzchnia II go rzędu bo eliminacja : $E_1 E_2' - E_2 E_1' = 0$

Równanie prostej

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$ jako przecięcie dwóch płaszczyzn

$$\left\{\begin{array}{l} u x_1 + v y_1 + w z_1 + 1 = 0 \\ u x_2 + v y_2 + w z_2 + 1 = 0 \end{array}\right\}$$ jako ~~prost~~ łącznica dwóch punktów $\left\{\begin{array}{l} x_1 y_1 z_1 \\ x_2 y_2 z_2 \end{array}\right.$

Jeżeli prosta przechodzi przez punkt $a\,b\,c$

$$A_1 a + B_1 b + C_1 c + D_1 = 0$$

$$A_1(x-a) + B_1(y-b) + C_1(z-c) = 0 \quad \Big|\ C_2$$

$$A_2(x-a) + B_2(y-b) + C_2(z-c) = 0 \quad \Big|\ -C_1$$

$$(A_1C_2 - A_2C_1)(x-a) + (B_1C_2 - B_2C_1)(y-b) = 0$$

~~$$\underbrace{(A_1C_2 - A_2C_1)}_{l}(x-a) = \underbrace{(B_1A_2 - B_2A_1)}_{n}(z-c) = \underbrace{(C_1B_2 - C_2B_1)}_{m}(y-b)$$~~

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

$$\frac{x-a}{\underbrace{B_1C_2 - B_2C_1}_{l}} = \frac{y-b}{\underbrace{C_1A_2 - C_2A_1}_{m}} = \frac{z-c}{\underbrace{A_1B_2 - A_2B_1}_{n}}$$

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

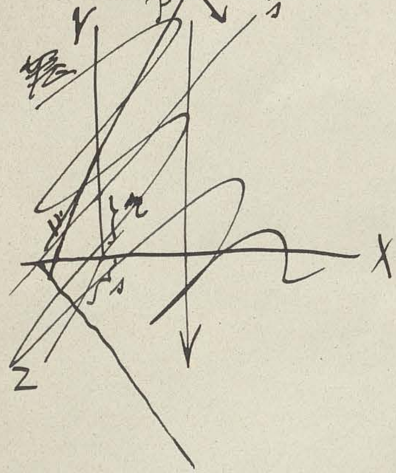
równanie symetryczne prostej

a podobnie: $\dfrac{u-\alpha}{\lambda} = \dfrac{v-\beta}{\mu} = \dfrac{w-\gamma}{\nu}$

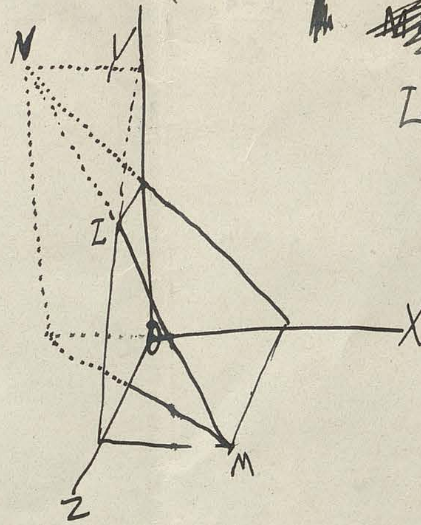
w spółrzędnych płaszczyzny

$$y = \frac{m}{l}x + \overbrace{\left(b - \frac{m}{l}a\right)}^{r}$$

$$z = \frac{n}{l}x + \underbrace{\left(c - \frac{n}{l}a\right)}_{s}$$



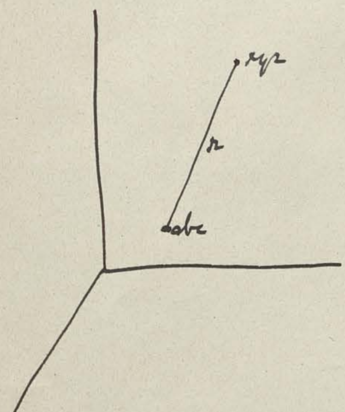
Równanie rozwinięte albo zwyczajne



$L \begin{cases} 0 \\ r \\ s \end{cases}$

$M \begin{cases} -\frac{rl}{m} \\ 0 \\ -\frac{rn}{m} + s \end{cases}$

$N \begin{cases} -\frac{sl}{n} \\ -\frac{sm}{n} + r \\ 0 \end{cases}$



$$\left.\begin{aligned} x-a &= r\cos\alpha \\ y-b &= r\cos\beta \\ z-c &= r\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad r = \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

$$\frac{x-a}{l} = - - - -$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= kl \\ \cos\beta &= km \\ \cos\gamma &= kn \end{aligned}\right\} \quad k^2 = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{}} \qquad \cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{}}$$

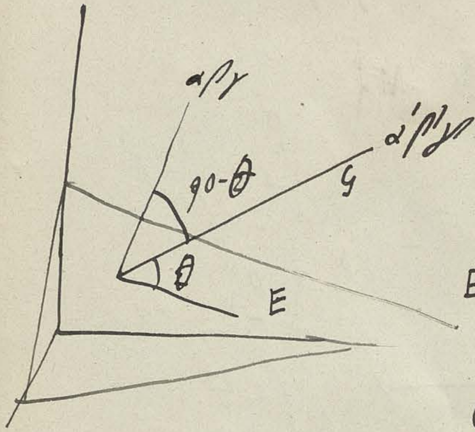
we formie zwyczajnej

$$y = Mx + R \qquad \frac{x}{1} = \frac{y-R}{M} = \frac{z-S}{N}$$

$$z = Nx + S$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+M^2+N^2}} \qquad \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{}} \qquad \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{}}$$

Kąt między ~~dwiema~~ prostą a płaszczyzną



$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$E\left\{ \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{}} \qquad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{}} \quad \dots \right.$$

$$g\left\{ \cos\alpha' = \frac{l}{\sqrt{}} \qquad \dots \right.$$

$$\sin\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

$$= \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

więc warunek żeby $g \parallel E$: $Al + Bm + Cn = 0$

a żeby $g \perp E$ musi być $\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$

więc $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = \text{const}$

Warunek żeby prosta leżała na płaszczyźnie:

$$\left.\begin{array}{l} Al + Bm + Cn = 0 \\ Aa + Bb + Cc + D = 0 \end{array}\right\}$$

Kąt między dwiema prostemi

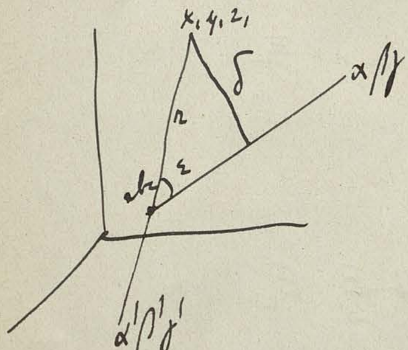
$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

$$= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

$g_1 \perp g_2$ jeżeli $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

$g_1 \parallel g_2$ $\quad \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$

Odległość punktu x_1, y_1, z_1 od prostej $\dfrac{x-a}{l} = \dfrac{y-b}{m} = \dfrac{z-c}{n}$



$$\delta = r \sin\varepsilon$$

$$= r\sqrt{\left[(\cos\beta \cos\gamma' - \cos\gamma \cos\beta')^2 + \dots\right]}$$

~~$= \sqrt{(x_1-a)^2 + (y_1-b)^2 + (z_1-c)^2}$~~

$r\cos\alpha' = x_1 - a \qquad r\cos\beta' = y_1 - b$ etc.

$$\delta = \frac{\left[\left[m(z_1-c) - n(y_1-b)\right]^2 + \dots\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Równanie prostej prostopadłej do płaszczyzny, przechodzącej przez punkt $P\begin{cases}a\\b\\c\end{cases}$

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$$ ponieważ $\frac{l}{\sqrt{\Sigma l^2}} = \frac{A}{\sqrt{\Sigma A^2}}$ itd.

Równanie łącznicy $P_1\ P_2$

$\cos\alpha = \frac{x_1-x_2}{\sqrt{\ }}$ $\cos\beta = \frac{y_1-y_2}{\sqrt{\ }}$ $\cos\gamma = \frac{z_1-z_2}{\sqrt{\ }}$

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{z-z_1}{z_1-z_2}$$

Równanie płaszczyzny $\perp G$ w punkcie P_1

~~$Ax + By + Cz + D = 0$~~

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ $\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{\ }}$ $\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{\ }}$ $\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{\ }}$

$$(x-x_1)\,l + (y-y_1)\,m + (z-z_1)\,n = 0$$

Równanie płaszczyzny przez P_1 równoległej do $E_1\ E_2$

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$
$$Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$$
$$Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Albo explicite:

$$x-x_1 + \frac{B}{A}\,y-y_1 + \frac{C}{A}(z-z_1) = 0$$
$$\left.l_1 + \frac{B}{A}\,m_1 + \frac{C}{A}\,n_1 = 0\right\}\frac{B}{A} =$$

Podobnie płaszczyzna przez g_1 ⊥ do E_1

Najkrótsza odległość między ~~[illegible]~~ $g_1\ g_2$

$$g_1:\quad \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}$$

$$g_2:\quad \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2}$$

$$\left.\begin{aligned} Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + D &= 0 \\ Al_1 + Bm_1 + Cn_1 &= 0 \\ Al_2 + Bm_2 + Cn_2 &= 0 \\ A(x-a_1) + B(y-b_1) + C(z-c_1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$ płaszczyzna przez $g_1 \parallel g_2$

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-a_1)(m_1n_2 - m_2n_1) + (y-b_1)(n_1l_2 - n_2l_1) + (z-c_1)(l_1m_2 - l_2m_1) = 0$$

We formie normalnej:

$$\frac{x(m_1n_2 - m_2n_1) + y(n_1l_2 - n_1l_1) + z(\quad) - [a_1(m_1n_2 - m_2n_1) + b_1(\quad) + c_1(\quad)]}{\sqrt{(\quad)^2 + (\quad \ldots}}$$

Zatem ~~[illegible]~~ ~~odległość od~~ długość prostopadłej z punktu $a_2\ b_2\ c_2$:

$$\frac{(a_2 - a_1)(m_1n_2 - m_2n_1) + \ldots}{\sqrt{\quad}}$$

Warunek aby S_1 S_2 się przecinały

Wtedy te odległość $=0$

$$(a_2-a_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1) + (b_2-b_1)(n_1 l_2 - n_2 l_1) + (c_2-c_1)(l_1 m_2 - l_2 m_1) = 0$$

Także bezpośrednio:

Płaszczyzna przez nie

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ Aa_1+Bb_1+Cc_1+D=0 \\ Aa_2+Bb_2+Cc_2+D=0 \\ Al_1+Bm_1+Cn_1=0 \\ Al_2+Bm_2+Cn_2=0 \end{array}\right\}$$

$$A(a_1-a_2)+B(b_1-b_2)+C(c_1-c_2)=0$$

$$\begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1$$

Rozwiązanie równań

$$\begin{array}{ll|l} a_{11}x + a_{12}y + \cdots & = b_1 & A_{11} \\ a_{21}x + a_{22}y + & = b_2 & A_{21} \\ a_{n1}x + a_{n2}y + \quad a_{nn}z & = b_n & A_{n1} \end{array}$$

$$x\Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jeżeli $\Delta = 0$: $x = y = z \cdots = \infty$

oprócz jeżeli także $\begin{vmatrix} b_1 \cdots \end{vmatrix} = 0$

co nastąpi (jeżeli $b \gtrless 0$) jeżeli dwa równania takie same, zatem jedno zbyteczne

wtedy pozostanie tylko $(n-1)$ równań, więc nie ~~[illegible]~~ wystarczają do oznaczenia

Równania jednorodne.

$$\begin{array}{ll|l} a_{11}x + a_{12}y + \cdots & = 0 & A_{11} \\ a_{21} & = 0 & A_{21} \end{array}$$

$\Delta x = 0$ etc.

Więc jeżeli $\Delta \gtrless 0$ to $x = y = \cdots = 0$

Jeżeli zaś $\Delta = 0$:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11} + a_{12}\frac{y}{x} + \cdots & = 0 \\ a_{21} + a_{22}\frac{y}{x} + \cdots & = 0 \\ \hline a_{n1} + a_{n2}\frac{y}{x} + \cdots & = 0 \end{array}\right\}$$

$n-1$ niewiadomych, zatem jedno równanie zbyteczne

ale można wyznaczyć tylko stosunki $\frac{y}{x}$ etc.

$$a_{11}\alpha_{12} + a_{21}\alpha_{22} = A_{n-1}\frac{x_2}{x_1} = A_{n-2}$$

$$a_{11}\alpha_{13} + \cdots = A_{n-1}\frac{x_3}{x_1} \text{ etc.} = A_{n-3}$$

Więc $x_1 : x_2 : x_3 \cdots = A_{n-1} : A_{n-2} : A_{n-3}$ etc. ~~$a_{11}\alpha_{12} + a_{12}\alpha_{22}$~~

~~$a_{11}\alpha_{13} + a_{21}\alpha_{23} +$~~ –

To zupełnie zrozumiałe jeśli się odwrotnie utworzy równania:

$$\Delta = 0 = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{21} A_{i1} + a_{22} A_{i2} + \cdots = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} A_{i1} + a_{n2} A_{i2} + \cdots a_{nn} A_{in} = 0 \end{array}\right\}$$

zatem jeśli $x_1 = \lambda A_{i1}$

$x_2 = \lambda A_{i2}$ etc. to spełnione

$\vdots$

$x_n = \lambda A_{in}$

N. p.

4 Płaszczyzny, $k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 + k_4 E_4 = 0$ warunek osi E . . .

$$\left.\begin{array}{ll} E_1 = 0 = & A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ E_2 = 0 & A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ E_3 = 0 & \\ E_4 = 0 & \text{——— —} \end{array}\right\}$$

przecinające się w jednym punkcie wtedy wszystkie równocześnie muszą być spełnione

zatem
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix} = 0$$

$x + y + z + \ \ =$

$$\begin{vmatrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ & & & \end{vmatrix} = 0$$

Δ znaczy: $A_{11} E_1 + A_{21} E_2 + \cdots = 0$

$k_1 E_1 + k_2 E_2 + \cdots = 0$

4 płaszczyzny nie przecinające się $R_1 = R_2$

wtedy ~~pr~~ równanie piątej płaszczyzny w formie:

~~R~~ $E = x_1 E_1 + \ldots \; x_4 E_4$ bo 4 równania wystarczają do znalezienia A_1 —

~~5 Płaszczyzna trójkątnych czworościan~~

wartości $E_1 \; E_2 \; E_3 \; E_4$ = spółrzędne czworościenne

Jeżeli w formie normalnej to one oznaczają odległości prostopadłe punktu od

ścian. $= x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4$

Naturalnie nie są niezależne; objętość czworościanu:

$$x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3 + x_4 \Delta_4 = 3V$$

Zwykłe spółrzędne są specjalnym ich przypadkiem t.j. gdzie $E_4 = \infty$

Podobnie także względem spółrzędnych płaszczyzny.

Wielomian jednorodny drugiego stopnia: $a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots$

$$\begin{aligned} = \; & (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots \quad) x_1 \\ & + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots \quad) x_2 \\ & + \ldots \end{aligned} \Bigg\} \quad a_{ik} = a_{ki}$$

$$= \sum_i x_i \sum_k a_{ik} x_k$$

Wypływa także z Eulera

$$f_n = x_1 \frac{\partial f}{\partial x} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots$$

Przekształcenie liniowe ogólne:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= l_{11} X_1 + l_{12} X_2 + \ldots \; l_{1n} X_n \\ &\vdots \\ x_n &= l_{n1} X_1 + l_{n2} X_2 + \ldots \; l_{nn} X_n \end{aligned}\right\} \text{oznaczone jeżeli} \quad L \equiv \begin{vmatrix} l_{11} & \\ & l_{nn} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

= wyznacznik = moduł przekształcenia.

$X_1 = \lambda_{11} x_1 + \lambda_{21} x_2 + \quad \lambda_{n1} x_n$

$X_n = \lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2n} x_2 + \quad \lambda_{nn} x_n$

$\lambda_{ik} = \dfrac{L_{ik}}{L}$ . . . . ↗

$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \dfrac{L^{n-1}}{L} = \dfrac{1}{L}$

---

prostokątne jeśli

$x_1^2 + x_2^2 + \dots \; x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 \dots + X_n^2$ to znaczy że:

~~$[l_{11} X_1 + l_{21} X_2 + \dots]^2$~~

$X_1^2 [l_{11}^2 + l_{12}^2 + \dots l_{1n}^2] + X_2^2 [l_{21}^2 + l_{22}^2 + \dots l_{2n}^2] + \dots +$

$+ X_1 X_2 [l_{11} l_{12} + l_{21} l_{22} + \dots] + \dots \quad = X_1^2 + X_2^2 \dots$

Więc: $\sum_i l_{ik}^2 = 1$ (n warunków) $\qquad \sum_i l_{ik} l_{im} = 0 \quad n \geq m$ $\qquad \dfrac{n(n-1)}{2}$

razem $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ warunków

z tego mnożąc równania pierwsze przez l_{12}, l_{22} etc.

$X_2 = l_{12} x_1 + l_{22} x_2 + \dots \quad + l_{n2} x_n$

więc $\lambda_{i2} = l_{i2}$ zatem $L = 1$

Np. $x' = x \cos(x'x) + y \cos(x'y) + z \cos(x'z)$:

$y' = x \cos(y'x) + y \cos(y'y) + z \cos(y'z)$

$z' = x \cos(z'x) + y \cos(z'y) + z \cos(z'z)$

prostokątne bo w jednym i w drugim

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

Doprawdy $\sum l_{ik}^2 =$

$\cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1$

$\cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1$

$\cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1$

$\cos x'y \cos x'z + \cos y'y \cos y'z + \cos z'y \cos z'z = 0$

etc

Każdy wielomian jednor. II, można wyrazić za pomocą przekszt. jako sumę kwadratów funkcyj jednorodnych I.

$$f(x_1 x_2 \dots) = \sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + \dots$$

$$x_i = \sum_r l_{ir} X_r$$

$$f = \sum_i \sum_k a_{ik} \left(\sum_r l_{ir} X_r\right)\left(\sum_s l_{ks} X_s\right)$$

$$= \sum_i \sum_k \sum_r \sum_s a_{ik}\, l_{ir}\, l_{ks}\, X_r X_s$$

$$= \sum_r \sum_s \sum_i \sum_k a_{ik}\, l_{ir}\, l_{ks}\, X_r X_s$$

$$= \sum_r \sum_s X_r X_s \underbrace{\sum_i \sum_k a_{ik}\, l_{ir}\, l_{ks}}_{A_{rs}} \qquad A_{rs} = A_{sr}$$

$$= A_{11} X_1^2 + A_{12} X_1 X_2 + A_{13} X_1 X_3 + \dots$$
$$+ A_{21} X_1 X_2 + A_{22} X_2^2 + A_{23} X_2 X_3 + \dots$$

$$A_{11} = a_{11} l_{11}^2 + a_{12} l_{11} l_{21} + a_{13} l_{11} l_{31} + a_{21} l_{21} l_{11} + a_{22} l_{21}^2 + \dots + \dots$$

Jeżeli wszystkie $A_{rs} = 0$ $\quad r \gtrless s$

to $= A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + \dots A_{nn} X_n^2$

w całym zatem $\frac{1}{2} n(n-1)$ warunków zatem nieskończenie wiele ~~[illegible]~~ sposobów

ale jeżeli postawimy żądanie że przekszt. = prostokątne to wszystko oznaczone bo tam mamy $\frac{1}{2} n(n+1)$ warunków

Więc tylko w jeden (oznaczony) sposób (z pewnym zastrzeżeniem) można zamienić

Np.

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2$$

($2a_{23} = a_{23} + a_{32}$)

$x_1 = l_{11}X_1 + l_{12}X_2 + l_{13}X_3$	$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$	$l_{12}l_{13} + l_{22}l_{23} + l_{32}l_{33} = 0$
$x_2 = l_{21}X_1 + l_{22}X_2 + l_{23}X_3$	l_2^2	$l_3 l_1$
$x_3 = l_{31}X_1 + l_{32}X_2 + l_{33}X_3$	l_3^2	$l_1 l_2$

$\sum a_{ik} l_{i2} l_{k3} =$

~~$a_{11} l_{12} l_{23}$~~

$$\begin{cases} a_{11}l_{12}l_{13} + a_{22}l_{22}l_{23} + a_{33}l_{32}l_{33} + a_{23}(l_{22}l_{33} + l_{32}l_{23}) + a_{12}(l_{12}l_{23} + l_{22}l_{13}) + \dots = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = f_1(x_1 x_2 x_3)$$

$$a_{11}l_{13} + a_{12}l_{23} + a_{13}l_{33} = f_1(l_{13}\, l_{23}\, l_{33})$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = f_2(x_1 x_2 x_3)$$

$$a_{12}l_{13} + a_{22}l_{23} + a_{23}l_{33} = f_2(l_{13}\, l_{23}\, l_{33})$$

$$\begin{cases} l_{12}f_1(l_{13}, l_{23}, l_{33}) + l_{22}f_2(l_{13}, l_{23}, l_{33}) + l_{32}f_3(l_{13}\, l_{23}\, l_{33}) = 0 \\ l_{13}\, f_i(l_{11}\, l_{21}\, l_{31}) + \\ l_{11}\, f_i(l_{12}\, l_{22}\, l_{32}) + \end{cases}$$

$$l_{12}\, f_1(l_{13}, l_{23}, l_{33}) + l_{22} f_2 \qquad + l_{32} f_3 \qquad = 0$$

$$l_{12}\, l_{13} \qquad + l_{22}\, l_{23} \qquad + l_{32}\, l_{33} \qquad = 0$$

$$l_{12}\, l_{11} \qquad + l_{22}\, l_{21} \qquad + l_{32}\, l_{31} \qquad = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \\ l_{11} & l_{21} & l_{31} \end{vmatrix} = 0$$

$$f_1\, L_{12} + f_2\, L_{22} + f_3\, L_{32} = 0$$

$$f_1 \left[L_{12}\, l_{32} - L_{32}\, l_{12} \right] = -f_2 \left[L_{22}\, l_{32} - L_{32}\, l_{22} \right]$$

$$f_1 \sim l_{13}\,.$$

$$\frac{f_1(l_{13}\, l_{23}\, l_{33})}{l_{13}} = \frac{f_2(l_{13}\, l_{23}\, l_{33})}{l_{23}} = \frac{f_3(\quad)}{l_{33}} = s_1$$

$$\frac{f_1(l_{1i}, l_{2i}, l_{3i})}{l_{1i}} = \frac{f_2(l_{1i} \quad)}{l_{2i}} = \frac{f_3(\quad)}{l_{3i}} = s_i$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-s_i)\, l_{1i} + a_{12}\, l_{2i} + a_{13}\, l_{3i} &= 0 \\ a_{21}\, l_{1i} + (a_{22}-s_i)\, l_{2i} + a_{23}\, l_{3i} &= 0 \\ a_{31}\, l_{1i} + a_{32}\, l_{2i} + (a_{33}-s_i)\, l_{3i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} a_{11}-s_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-s_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s_i \end{vmatrix} = 0$$

~~Kk~~ s rzeczywiste czy urojone?

s_1 i s_2 ~~urojone~~ (above: chyba) sprzężone, także l_1 i l_2

$l_1 = \alpha + i\beta \qquad m_1 = \alpha' + i\beta' \qquad n$ —

$l_2 = \alpha - i\beta \qquad m_2 = \alpha' - i\beta'$

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 + \alpha''^2 + \beta''^2 = 0$

niemożliwe oprócz jeśli $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = \quad = 0$ co jednak niemożliwe bo $l^2 + m^2 \quad = 1$

zatem wszystkie rzeczywiste

zatem także współczynniki l etc. będą oznaczone rzeczywiste;

wyjątek jeśli 2 równe albo 3 równe pierwiastki, wtedy nie całkiem oznaczone, ale to

<u>na później zostawimy</u>

Podobnie w $\quad \frac{n(n-1)}{2}$ kwadratów

Powierzchnie II

$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + \dots \quad 2a_{12} xy + 2a_{23} yz + 2a_{13} xz + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0$

$x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4}$

$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \dots + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots \quad 2a_{14} x_1 x_4 + \dots \quad a_{44} x_4^2 = 0$

Płaszczyzny przecinają II w krzywych homotetycznych N. p. $z = c$

(bo współczynniki przy x^2 y^2 xy będą takie same)

Prosta przecina II w 2 punktach:

$P'(x_1' \dots x_4') \qquad P''(x_1'' \quad x_4'') \qquad$ punkt na łączności $\lambda x_i' + \mu x_i''$

$f = x_1 \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4$

$f_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4$ | $x_i = \lambda x_i' + \mu x_i''$

$f_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4$

$f_3 =$

$f_4 =$

$f_i = \lambda f_i' + \mu f_i''$

$(\lambda x_1' + \mu x_1'')(\lambda f_1' + \mu f_1'') + (\lambda x_2' + \mu x_2'')(\lambda f_2' + \mu f_2'') + \cdots = 0$

$\lambda^2 (\underbrace{x_1' f_1' + x_2' f_2' + \cdots}_{f'}) + \lambda\mu (x_1' f_1'' + \cdots x_4' f_4'' + x_1'' f_1' + \cdots x_4'' f_4') + \mu^2 (\underbrace{x_1'' f_1'' + \cdots}_{f''}) = 0$

$\lambda^2 f' + 2\lambda\mu (x_1'' f_1' + \cdots x_4'' f_4') + \mu^2 f'' = 0$

Drugiego stopnia względem $\frac{\lambda}{\mu}$ zatem 2 punkty

$x = \frac{x_1}{x_4} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)_1 x' + x''}{\lambda}$

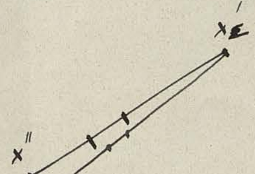
Jeśli $x_1'' f_1' + \cdots x_4'' f_4' = 0$ to $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 f' + f'' = 0$

$\frac{\lambda}{\mu} = \pm \sqrt{-\frac{f''}{f'}}$

zatem punkty x $\quad \alpha \pm \beta$

$4 \quad \alpha' \pm \beta'$

$2 \quad \alpha'' \pm \beta''$



stosunek podziału podwójnego

$\frac{(x)_1 \pm x'}{\cdot} = -1$

Jeżeli P' stały punkt z którego wychodzi snop promieni to na każdym promieniu wydzielmy możli 4 punkty harmoniczne jeśli punkty P'' zadość uczynią równaniu: $x_1 f_1' + x_2 f_2' + \cdots x_4 f_4'$ | ~~[illegible]~~ Płaszczyzna biegunowa (miejsce prom...)

Także odwrotnie:

$x_1'' f_1' \equiv x_1' f_1'' + \cdots x_4' f_4'' = 0$

znaczy że P' leży na biegunowej punktu P''

Więc dwa punkty P' i P'' = punkty sprzężone

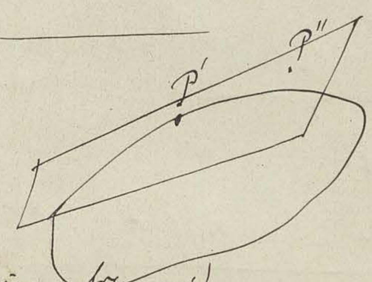
Jeśli punkt P' porusza się po płaszczyźnie to biegunowa jego obraca się koło bieguna tej płaszczyzny

Jeśli P' po prostej to biegunowa jego ~~po~~ koło drugiej prostej

= proste sprzężone

Jeśli P' leży na powierzchni samej

$x_1' f_1' + x_2' f_2' + \quad + x_4' f_4' = 0$ to



punkt P'' = punkt sprzężony (bo powinien leży na biegunowej)

zatem prosta P'' przecina powierzchnię w 2 punktach harmonicznych do P'P''

t.j. w dwuch punktach nieskończ. bliskich

Zatem jest to płaszczyzna styczna

P' = punkt styczności

więc w spół[rzędnych] zwykł[ych] xyz:

$x f_1(x'y'z'1) + y f_2(x'y'z'1) + z f_3(x'y'z'1) + f_4(x'y'z'1) = 0$

Normalna ma równania:

$$\frac{x-x'}{f_1(x'y'z'1)} = \frac{y-y'}{f_2(\quad)} = \frac{z-z'}{f_3(\quad)}$$

Jeśli szukamy płaszczyzny biegunowej do pojedynczego punktu w ∞ którego

kierunek: ~~$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$~~

$\frac{x''}{l} = \frac{y''}{m} = \frac{z''}{n} = r$ $x'' = lr$, $y'' = mr$, $z'' = nr$

$x'' f_1(rl, rm, rn, 1) + y f_2(rl, rm, rn, 1) + \dots + f_4(rl, rm, rn, 1) = 0$

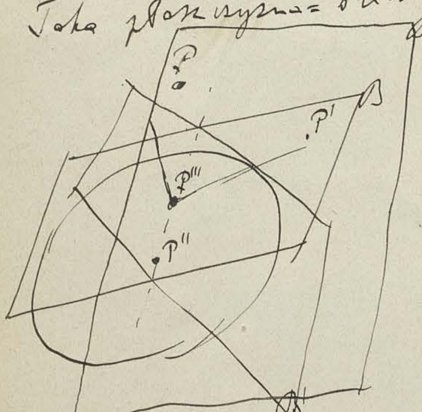
podzielić przez r i $r = \infty$

$(a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n)x + (a_{12} l + \dots)y + (\quad)z + a_{14} l + a_{42} m + a_{43} n = 0$

$= (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14})l + (\quad)m + (\quad)n = 0$

Więc jeśli $m\ l\ n$ dowolne to muszą istnieć owe 3 równania dla punktu środ.

Taka płaszczyzna = średnicowa, przechodzi zawsze przez środek pow.



czworościan ze sobą sam sprzężony

szczyt punktów p—

Jeśli $P P' P''$ w ∞ to P''' w środku stąd = 3 płaszczyzny średnicowe

ze sobą sprzężone ; odcinki ci do punktu gdzie proste przez nie przecinają ~~ś~~

pow. = średnice sprzężone

Biegun w nieskończoności = środek ponieważ będzie środkiem każdej cięciwy; jeśli $= 0$ dla jakichkolwiek spółrzędnych $x' y' z'$

a $\frac{x}{x_4} = \frac{y}{x_4} = \frac{z}{x_4} = \infty$ to muszą zachodzić równania

$f_1' \equiv a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + a_{13} x_3' + a_{14} x_4' = 0$

$f_2' \equiv a_{12} x_1' + a_{22} x_2' + a_{23} x_3' + a_{24} x_4' = 0$

$f_3' \equiv$

$= 0$

} zatem $a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} = 0$

$a_{12} x + \sim$

oznaczę taki punkt P'

który jest środkiem ~~względem P''~~

Tamte równania zawierają 3 płaszczyzny biegunowe punktów $x = \infty$, $y = \infty$, $z = \infty$

1). Albo przecinają się w 1 punkcie

α). w skończonej odległości : $\frac{x_0}{A_{41}} = \frac{y_0}{A_{42}} = \frac{z_0}{A_{43}} = \frac{1}{A_{44}}$

β). w nieskończonej odległ. jeśli $A_{44} = 0$ (a przynajmniej jedno z $A_{41} \ldots \gtrless 0$

2). wzdłuż prostej

prosta środków $A_{41} = A_{42} = A_{43} = A_{44} = 0$

równanie jej $\alpha_{23} x - a_{23} a_{14} = \alpha_{31} y - a_{31} a_{24} = \alpha_{12} z - a_{12} a_{34}$

gdzie α_{ik} = ilość dołączona do a_{ik} w A_{44}

(walcowe)

3). wzdłuż płaszczyzny t. j. jeśli się schodzą razem } albo jeśli jedna lub więcej leży w nieskończoności

t. j. jeśli $\alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{32}$ | $a_{23} a_{14} = a_{31} a_{24} = a_{12} a_{34}$

Dowody 1 punkt, 2 na pł., 3 na pr. 3, 6 stopni

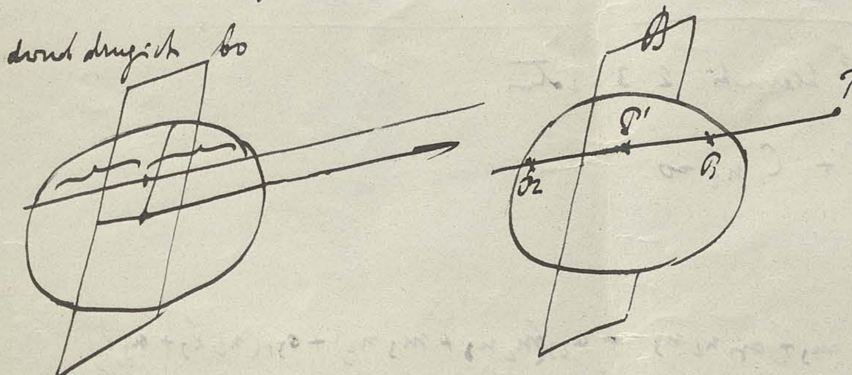
4 punkty sprzężone z których 1 w środku,

wtedy 3 inne muszą być w ∞, ale kierunki ich oznaczone =

3 średnice sprzężone (3 stopnie dowolności)

~~ ~~ cięciwy równoległe z jedną średnicą są przecinane w połowie przez płaszczyznę średnicową

dwóch drugich bo



$$\frac{P'P_1}{P'P_2} = -\frac{PP_1}{PP_2} = -\frac{PP_1}{PP_1 + P_1P_2}$$

$$\lim_{PP_1 \to \infty} = -1 \quad \| \quad \lim P_2P' = P'P_1$$

Więc z tego także: płaszczyzna równoległa z średnicową (1,2) w punkcie końcu średnicy (3) jest styczną.

Także odwrotnie: jeśli 3 średnice takie że przez średnicowe ~~ przecinane w połowie

to średnice sprzężone bo środek i 3 punkty ∞ będą 4 tworzyły sprzężone.

Takie średnice sprzężone które są ⊥ do siebie = osie główne.

3 spojrzeń:

$(a_{11} l_1 + a_{12} m_1 + a_{13} n_1) x + (a_{12} l_1 + a_{22} m_1 + a_{23} n_1) y + (a_{13} l_1 + a_{23} m_1 + a_{33} n_1) z = 0$

l_2

l_3

Pierwsza musi zawierać kierunki 2, 3 _ zatem

$A_1 l_2 + B_1 m_2 + C_1 n_2 = 0$

$A_1 l_3 + B_1$

etc.

$3 \begin{cases} a_{11} l_2 l_3 + a_{22} m_2 m_3 + a_{33} n_2 n_3 + a_{23}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + a_{31}(n_2 l_3 + n_3 l_2) + a_{12}(l_2 m_3 + l_3 m_2) = 0 \\ \\ \end{cases}$

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \quad \Big| \; a_{23} \quad \Big| \; a_{23}$$

$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \quad \Big| \; -a_{13} \quad \Big| \; \cdot$$

$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \quad \Big| \quad \Big| \; -a_{12}$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x + \overset{\alpha_{13}}{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}y + a_{14}a_{23} - a_{24}a_{13} = 0$$

$$(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})x + \overset{\alpha_{12}}{(a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12})}z + a_{14}a_{23} - a_{34}a_{12} = 0$$

$$\alpha_{13}y - a_{13}a_{24} = \alpha_{12}z - a_{12}a_{34} = \alpha_{23}x - a_{23}a_{14}$$

Osi główne = średnice gdzie kierunek sprzężony ⊥ do sprzężonej średnicy

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$ (kierunek ~~prostej~~ trzyma ∞)

średnicowa:

$$\underset{A}{(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n)}x + \underset{B}{(a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n)}y + \underset{C}{(a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)}z + \underset{D}{a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n} = 0$$

Jeśli to ma być ⊥ do tamtej prostej to

~~$Al + Bm$~~ $$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = s$$

$$(a_{11} - s)l + a_{12}m + a_{13}n = 0$$
$$a_{12}l + (a_{22} - s)m + a_{23}n = 0$$
$$a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - s)n = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-s & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0$$

3 pierwiastki = 3 osie główne

$a_{11}x^2 + \dots \qquad = 0$

Np. zatrzymam uwagę

~~jeżeli przedstawimy to na osi współrzędnych to podwójne iloczyny muszą zniknąć~~

~~to~~ ~~$a_{11}x^2 + a_{12}x$~~

$x = l_{11}x' + l_{12}y' + l_{13}z'$

$y =$

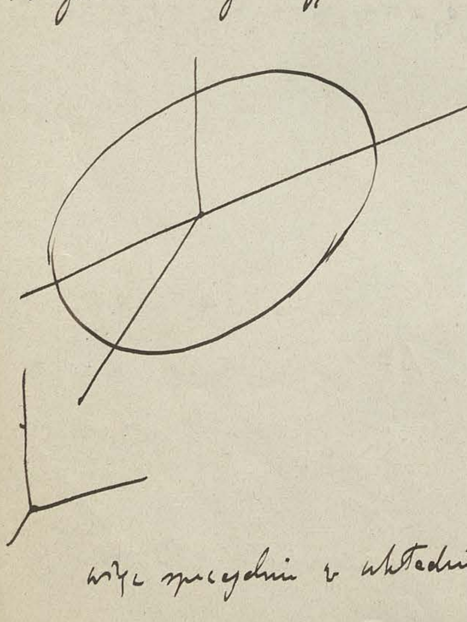
$z =$

$(a_{11}l_{11}^2 + a_{22}l_{21}^2 + a_{33}l_{31}^2 + 2a_{23}l_{21}l_{31} + 2a_{31}l_{31}l_{21} + 2a_{12}l_{11}l_{21})x'^2 +$

$(\ )y'^2 + z'^2(\ ) + \dots\dots \quad + 2(a_{14}l_1 + a_{24}m_1 + a_{34}n_1)x + 2(\quad)y + 2a_{3}\,z = 0$

Podwójne iloczyny muszą zniknąć

To już z tego wynika że



dane ξ η

dla ξ dwie wartości

$\xi^2 + 2m\xi = \dots n$

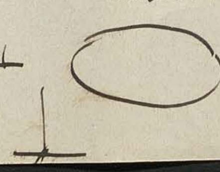
$\xi = -m \pm \sqrt{\ }$

środek $\frac{\xi_1 + \xi_2}{2} = -m$

musi być tylko stała

niezależnie od η ξ

więc szczególnie w układzie $\perp$



więc zadanie przekształcenia zamieniające w 3 kwadraty

61

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & & \\ & \ddots & \\ & & \end{vmatrix} = 0$$ 3 kwadratów możliwe

a to właśnie są takie równania określające owe 3 osie ⊥ wzajem

zatem współczynniki $l_{11} = l_1$

$l_{12} = m_1$

$l_{13} = n_1$ etc.

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + 2h_1 x' + 2h_2 y + 2h_3 z' + a_{44} = 0$$

A przenosząc początek spółrzędnych:

$$x' = \alpha + x \qquad y' = \beta + y \qquad z' = \gamma + z$$

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2(h_1 + s_1\alpha)x + 2(h_2 + s_2\beta)y + 2(h_3 + s_3\gamma)z + k = 0$$

I. Jeśli 3 pierwiastki równ. różne od zera

$$\alpha = -\frac{h_1}{s_1} \qquad \beta = -\frac{h_2}{s_2} \qquad \gamma = -\frac{h_3}{s_3}$$

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 + k = 0$$

Początek spółrzędnych = środek

gdyby jednak $k = a_{44} - (s_1\alpha^2 + s_2\beta^2 + s_3\gamma^2) = 0$

to jeszcze możliwe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

II. Jeśli jeden z pierwiastków $s=0$

$\begin{vmatrix} a_{11}-s & & \\ & \ddots & \\ & & \end{vmatrix}$ więc $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}=0$ zatem środek w nieskończoności albo prosta środków

więc wtedy tylko $s_2\ s_3 \gtrless 0$ zatem $\beta = -\frac{h_2}{s_2}$ $\gamma = -\frac{h_3}{s_3}$

z równania:

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2 h_1 x' + k = 0$$

α). jeśli $h_1 \gtrless 0$ to $x' = x + \alpha$ tak że $k' = 0$

$$\text{więc } s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2 h_1 x = 0$$

$$\text{więc } \left[\frac{y^2}{p^2} \pm \frac{z^2}{q} = 2x\right.$$

albo $h_1 = 0$ wtedy

$$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

II $s_1 = s_2 = 0$ $s_3 \gtrless 0$ $\gamma = -\frac{h_3}{s_3}$

$s_3 z^2 + 2 h_1 x + 2 h_2 y + k = 0$ } a przekształcając yix

można to sprowadzić do $z^2 = \pm 2 p x$

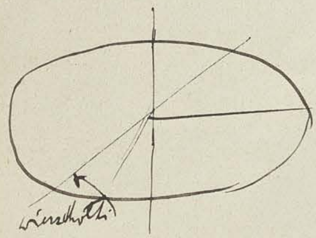
$$z^2 = \pm c^2$$

$$z^2 = 0$$

I 1). dowolne kierunki osi $a>b>c$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Elipsoida

Przekroje z osiami współrzędnych = elipsy (przekroje główne)



Taksamo takie przez płaszcz. równoległe do nich

x_0 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$ ma osi $b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$ $c\sqrt{\ldots}$

$\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}$ osie = osie symetrii

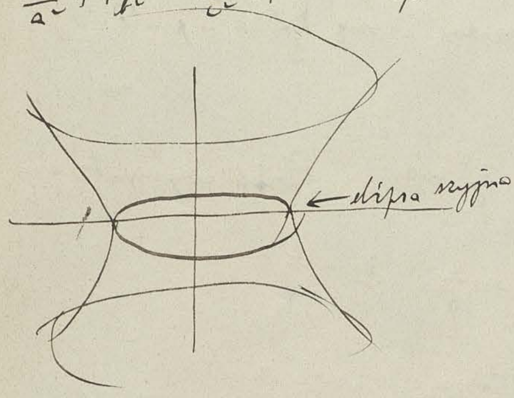
---

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$ elipsoida obrotowa wydłużona (powstaje przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ koło osi x)

$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ spłaszczona

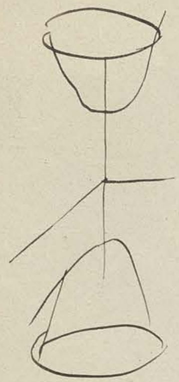
$x^2+y^2+z^2=a^2$ kula

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ hiperboloida jednopowłokowa



$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$ hyperb. jednop. obrotowa

3). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ hip. dwupowłokowa



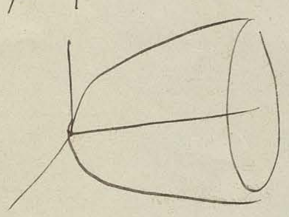
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{z^2}{c^2}-1\right)$ elipsy jeśli $z>c$

$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ obrotowa

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm1$ hip. sprzężone, mają wspólny stożek asympt.

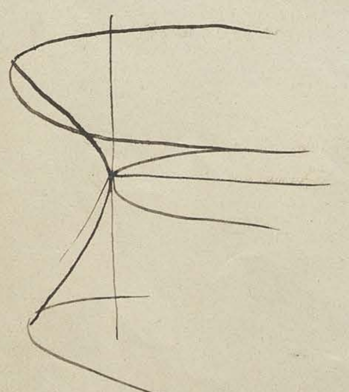
II bez środka

1). $\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x$ Paraboloida eliptyczna



jeśli $p=q$ obrotowa

2). $\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$ Paraboloida hiperboliczna / Przekrój z osią YZ = 2 proste



$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0$ Stożek asymptotyczny

$\equiv\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)$

= 2 płaszczyzn przez oś X

i przez proste w których YZ przecina powierzchn

~~Kula~~ Szczególne najprostsze przypadki

Kula $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

więc: $a_{11}=a_{22}=a_{33}$ $\quad a_{23}=a_{13}=a_{12}=0$

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$$

$$(x+A)^2+\dots = A^2+B^2+C^2-D$$

$$a=-A,\quad b=-B,\quad c=-C,\quad r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$$

Stożek Ogólny stożek = pow. utw. przez linię przech. przez punkt stały i przesuwającą się po linii stałej.

"wierzchołek" "kierownica"

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

$$F(xyz)=0 \qquad \Phi(xyz)=0 \quad \Big\}\ \text{kierownica}$$

$$F\left[x,\ b+\frac{m}{l}(x-a),\ c+\frac{n}{l}(x-a)\right]=0 \qquad \Phi[\ \dots\ ]=0$$

z tych wyrugować x $= \Psi\left(\frac{m}{l}, \frac{n}{l}\right)=0$

więc $\Psi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right)=0$ = Rów

Więc jednorodne względem $x-a$, $y-b$, $z-c$

Drugiego rzędu:

$$A_1(x-a)^2+A_2(y-b)^2+A_3(z-c)^2+2B_1(y-b)(z-c)+2B_2(z-c)(x-a)+2B_3(\ )=0$$

$$a_{11}=A_1,\quad a_{22}=A_2,\quad a_{33}=A_3,\quad a_{23}=B_1,\quad a_{31}=B_2,\quad a_{12}=B_3$$

$$a_{14}=-(A_1a+B_3b+B_2c);\quad a_{24}=-(B_3a+A_2b+B_1c);\quad a_{34}=-(B_2a+B_1b+A_3c)$$

$$a_{44}=A_1a^2+A_2b^2+A_3c^2+2B_1bc+2B_2ca+2B_3ab$$

t. j.: $a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c + a_{14} = 0$

$a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c + a_{24} = 0$

$a_{31} a + \text{———} = 0$

$a_{41} a + \qquad = 0$

Zatem tylko możliwe jeśli: $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & & \\ & & a_{44} \end{vmatrix} = 0$

Z tego potem

$$\frac{a}{A_{14}} = \frac{b}{A_{24}} = \frac{c}{A_{34}} = \frac{1}{A_{44}}$$

z czego współrzędne środka a, b, c

Walec ogólny = pow. utw. pr. prostą równoległą do danego kierunku przecinającą daną krzywą (~~[illegible]~~)

$$\frac{x}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$ } gdzie $l\, m\, n$ = punkt, $b\, c$ punkt przecięcia z pł. YZ

$F(xyz) = 0 \quad \Phi(xyz) = 0$

rugujemy xyz: $\Psi(b, c) = 0$

$$\equiv \Psi\left(\frac{ly - mx}{l}, \frac{lz - nx}{l}\right) = 0$$

Jeśli $\parallel$ do X, albo Y, albo Z to przecięcie = ślad (drugi; łatwo prosto)

Najogólniejszy walec II:

$$A(ly-mx)^2 + B(lz-nx)^2 + 2C(ly-mx)(lz-nx) + Dl(ly-mx) + 2El(lz-nx) + Fl^2 = 0$$

Więc

$a_{22} = Al^2$ $\quad a_{11} = Am^2 + Bn^2 + 2Cmn \quad = a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{23}mn$ wstawiając Bmn

$a_{33} = Bl^2$ $\quad a_{12} = -(Cnl + Alm)$

$a_{23} = Cl^2$ $\quad a_{13} = -(Bnl + Clm)$

$a_{24} = Dl^2$ $\quad a_{14} = -(Enl + Dlm)$

$a_{34} = El^2$

$a_{44} = Fl^2$

$= a_{12}l + a_{22}m + a_{23}n = 0$

$a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n = 0$

$a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n = 0$

$a_{11}l + a_{12}n + a_{13}n = 0$

Rugując $l\ m\ n$ z jakichkolwiek trzech:

$A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$

więc wogóle

Także

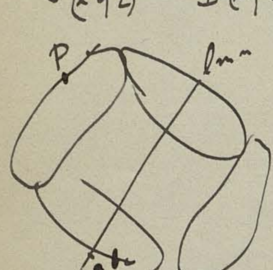
$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{14} \\ & & \\ a_{31} & & a_{34} \\ a_{41} & & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Wtedy z dwuch równań otrzymuje się stosunki $l : m : n$

więc zapomocą trzeciego: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ te wielkości same.

Powierzchnia obrotowa = utworzona przez obrót danej krzywej koło danej osi.

$F_{(xyz)}$ $\quad \Phi_{(xyz)}$ = krzywa



odległość $\overline{PM}^2 = r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ } Kula

$lx + my + nz - p$ = Płaszcz. równoleżnika

rugując z tych równań $x\ y\ z$:

$\Psi_{(r^2, p)} = 0$

$\Psi\left[[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2],\ [lx + my + nz]\right] = 0$

II. :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+A(lx+my+nz)^2+2D(lx+my+nz)+C=0$$

$$C+a^2+b^2+c^2=k\,a_{44}$$

$$l^2+m^2+n^2=1$$

$$\alpha\begin{cases}1+Al^2=k\,a_{11}\\1+Am^2=k\,a_{22}\\1+An^2=k\,a_{33}\end{cases}\qquad \beta\begin{cases}Amn=k\,a_{23}\\Anl=k\,a_{13}\\Alm=k\,a_{12}\end{cases}\qquad \gamma\begin{cases}Dl-a=k\,a_{14}\\Dm-b=k\,a_{24}\\Dn-c=k\,a_{34}\end{cases}$$

z β:

$$Al^2=k\frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}}\qquad Am^2=k\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}\qquad An^2=k\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

więc w połączeniu z α:

$$a_{11}-\frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}=a_{33}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}\Bigg|=-\frac{1}{k}$$

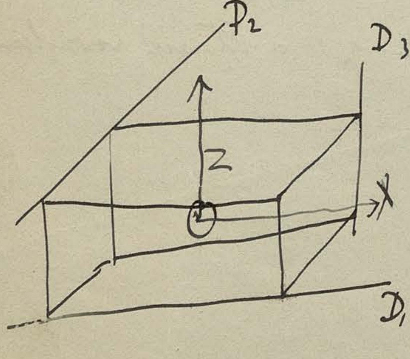
Wtedy z α): $A=k(a_{11}+a_{22}+a_{33})-3$

γ): $$\frac{k a_{14}+a}{l}=\frac{k a_{24}+b}{m}=\frac{k a_{34}+c}{n}$$

Powierzchnie prostoliniowe przez ruch prostej ~~ślizgającej się po~~ poruszającej w przestrzeni!
rozwijalne jeśli 2 położenia następujące w jednej płaszczyźnie

---

Prosta ślizgająca się po 3 prostych



$$D_1\begin{cases}y=b\\z=-c\end{cases}$$

$$D_2\begin{cases}z=c\\x=-a\end{cases}$$

$$D_3\begin{cases}x=a\\y=-b\end{cases}$$

Prosta $(D_2 D_3)$ = przecięcie 2 płaszczyzn

płaszczyzna przez D_2 : $z - c = \lambda (x+a)$ $\left(\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tg}\varphi \ldots\right.$

D_3 : $y + b = \mu (x - a)$

D_1 : $y - b = k(z + c)$

$D_2 D_3$: $\mu(z-c) - \lambda(y+b) = 2\lambda\mu a$

musi leżeć także w płaszczyźnie:

$$k(z+c) - (y-b) = 0 \quad | \; \varepsilon$$

t. j. :

$$\varepsilon k = \mu$$
$$\varepsilon \cdot = \lambda$$
$$\varepsilon(kc + b) = -(\mu c + \lambda b + 2\lambda\mu a)$$

$$\mu c + \lambda b = \nearrow$$

t. j. $a\lambda\mu + \lambda b + \mu c = 0$

$\lambda = \frac{z-c}{x+a}$ $\mu = \frac{y+b}{x-a}$ więc równanie:

$$a y z + b x z + c x y + abc = 0$$ hip. I.

[illegible]

Ogólna forma II-ej ze środkiem:

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 1$$

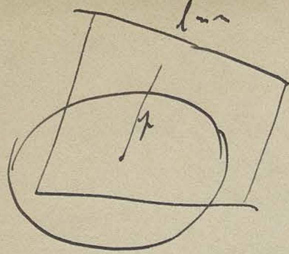
pł. styczna: (1 biegunowa) $a X x + b Y y + c Z z = 1$

średnicowa sprz. z kierunkiem $X\, Y\, Z$:

$$a X x + b Y y + c Z z = 0$$

$|(a_{11} l + a_{12} m + a_{13} n)\, x + (\ )\, y + (\ )\, z + (\ ) = 0$

zatem równoległe



$$a X x + b Y y + c Z z = 1$$

we formie normalnej

$$\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}$$

zatem $p = \dfrac{1}{\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}}$ = $l = \dfrac{ax}{\sqrt{\ }}$ $m = \dfrac{by}{\sqrt{\ }}$

więc ~~$\dfrac{l^2}{a} + \dfrac{m^2}{b} + \dfrac{n^2}{c} = p$~~

$$p = lx + my + nz = \left(\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

$$p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}$$

$$p'^2 = \frac{l'^2}{a} + \frac{m'^2}{b} + \frac{n'^2}{c}$$

$$p''^2$$

$$\sum_3 p^2 q^2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$\sum$(normalnych)^2 na 3 prostop. płaszcz. = stała

6

$$a\left[{\underbrace{(y+z)}_{u}}^2-(y-z)^2\right]+b\left[{\underbrace{(x+z)}_{v}}^2-(x-z)^2\right]+c\left[{\underbrace{(x+y)}_{w}}^2-(x-y)^2\right]+\text{etc}$$

~~$x-z = x+y-y+z$~~

$$\begin{vmatrix} 0-s & c & b & 0 \\ c & 0-s & a & 0 \\ b & a & 0-s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abc \end{vmatrix}=0$$

$$-s^3+2abc+s(b^2+a^2+c^2)=0$$

$s-$

$v-u = x-y$

$w-v = y-z$

$u-w = z-x$

$$a\left[u^2-(w-v)^2\right]+b\left[v^2-(u-w)^2\right]+c\left[w^2-(u-v)^2\right]+\text{etc}$$

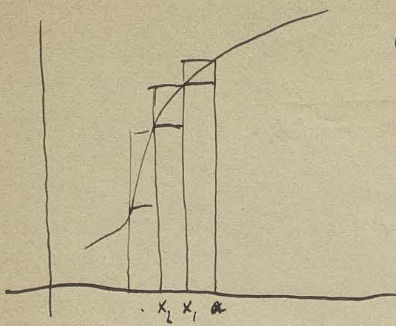
$$a(u^2-w^2-v^2+2vw)+b(v^2-u^2+w^2-2uw)+c(w^2-u^2-v^2+2uv)+\text{etc}$$

98/53 VI 10

62

Zastosowanie rachunku różniczk. w geometryi

lato 1900



$F >$

$(a-x_1) f(a) + (x_1 - x_2) f(x_1) + \dots > (a-x_1) f(x_1) + \dots$

$+ \dots$

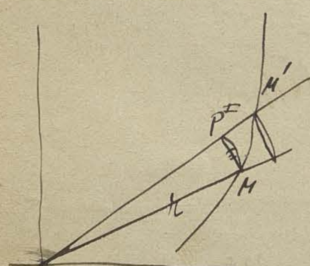
$f(x_{n+1}) - f(x_n) < \varepsilon$

$(a-x_1)\, \varepsilon + \dots$

różnica $< \varepsilon\,(a-b)$ zatem $\lim = 0$

$$F = \lim \Sigma \dots = \int_a^b dx \cdot f(x)$$

$dF = y\, dx$



$r = f(\varphi)$

$$\frac{1}{2} r^2 d\varphi < dF < \frac{(r+dr)^2}{2} d\varphi$$

$$\frac{r^2}{2} < \frac{dF}{d\varphi} < \frac{1}{2}\left(r^2 + dr + \frac{dr^2}{2}\right)$$

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \qquad F = \int \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

$$d\varphi \cdot \frac{x^2}{\cos^2\varphi} = r^2 d\varphi = x\,dy - y\,dx$$

$$dF = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

$$\lim \frac{\Delta s}{MM'} = 1$$

$$MM' = \sqrt{PM^2 + PM'^2} = \sqrt{\left[r\,\Delta\varphi \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\right]^2 + \Delta r^2}$$

~~$\lim \Delta s$~~

$$\lim \frac{MM'}{\Delta s} = \lim \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta s}\right)^2 + \left[r \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}\right]^2}$$

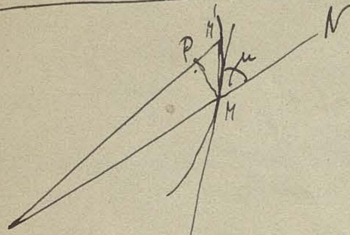
$$1 = \sqrt{\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$x = r\cos\varphi \qquad dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi$

$y = r\sin\varphi \qquad dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi$

$\Big\}\; ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$

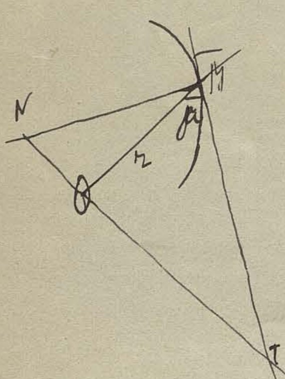


$$\mu = \lim M'MN$$

$$\cos\mu = \lim \sin(PMM') = \lim \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}$$

$$\sin\mu = \lim \frac{\rho\,\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}$$



$$S_t = OT = r\operatorname{tg}\mu = \frac{r^2}{r'} \qquad S_n = ON = \frac{r}{\operatorname{tg}\mu} = r'$$

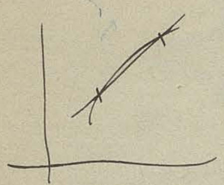
$$T = \sqrt{r^2 + S_t^2} = r\frac{ds}{dr} \qquad N = \sqrt{r^2 + S_n^2} = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$\gamma = \mu + \varphi \qquad R = \frac{ds}{d\gamma}$$

$$d\gamma = d\mu + d\varphi \qquad \frac{d\mu}{\cos^2\mu} = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2}\,d\varphi \qquad \frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{r'^2 - rr''}{r'^2}\,\frac{1}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

$$R = \frac{ds}{d\varphi}\cdot\frac{1}{\frac{d\mu}{d\varphi} + 1} = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

Styczna = prosta przechodząca przez 2 nieskończ. bliskie punkty



$$\eta - y = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)(\xi - x) \qquad y = f(x)$$

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$ naturalnie tylko wtedy jeśli egzystuje $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$= f'(x)(\xi - x)$$ t.j. jeśli funkcya f może być różniczkowana

---

Jeśli n.p. $y = \varphi(t)$ $\quad x = \psi(t)$

$dy = \varphi'(t)\,dt \quad dx = \psi'(t)\,dt$

$$\eta - y = \frac{\varphi'}{\psi'}(\xi - x)$$

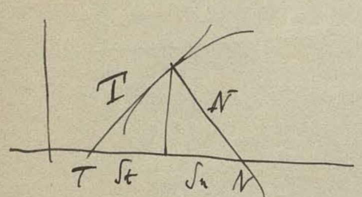
(równ. cykloidy) $\left.\begin{array}{l} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1-\cos\varphi)\end{array}\right\}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$

$f(x, y) = 0$

Albo $x = \psi(y)$ albo odwrotnie $\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$



Subnormala $\quad S_n = y\frac{dy}{dx} \qquad N = \sqrt{y^2 + \left(y\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Subtangenta $\quad S_t = y\frac{dx}{dy} \qquad T = \sqrt{y^2 + \dots} = y\sqrt{}$

Asymptota (przy krzywych sięgających do nieskończoności) = prosta której odległość od punktu krzywej = lim 0

$$y = f(x)$$
$$\eta = g\xi + h$$

odległość $= \frac{y-gx-h}{\sqrt{1+g^2}}$

$$\lim\left\{\frac{y-gx-h}{\sqrt{1+g^2}}\right\} = 0 \qquad \text{więc} \quad y - gx - h = \varepsilon$$

$\frac{y}{x} = g + \frac{h+\varepsilon}{x}$

~~$\lim \frac{y}{x} = g$~~ $h = \lim(y - gx)$

$g = \lim \frac{y}{x}$ tedy równanie jej : $y = \xi \lim \frac{y}{x} + \lim(y - x\lim\frac{y}{x})$

Twierdzimy że ~~taka~~ styczna w punkcie $x=\infty$, y jeśli w ogóle istnieje, jest identyczna z asymptotą $y = \xi\left(\lim_\infty \frac{dy}{dx}\right) + \lim_\infty \left[y - x\frac{dy}{dx}\right]$

Oparcie: $\lim_\infty \frac{y}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_\infty \frac{\frac{dy}{dx}}{1} = tg\,\gamma_\infty$

jako wyrażenie [illegible]

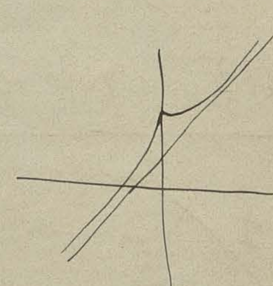
$\lim(y - gx) = \lim \frac{\frac{y}{x} - g}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \frac{\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)$

więc faktycznie tamte równania stają się identyczne z tem w razie jeśli istnieją te wartości graniczne.

N. p. ~~$y = axe^{-x} + b$~~

~~$\frac{dy}{dx} = ae^{-x} - axe^{-x}$ $\lim \frac{dy}{dx} = a = g$~~

~~$y - x\frac{dy}{dx}$ $\lim(y - ax) = \lim axe^{-x}$~~

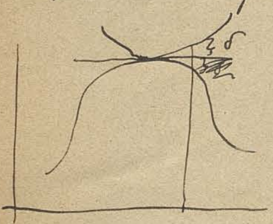


$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ $h = \lim\left(y - \frac{b}{a}x\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$ $= \lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim\left(y - \frac{b^2x^2}{a^2y}\right) = \lim \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = \frac{-}{\infty} = 0$

Maxima Minima

zupełnie w ... sposób, właściwie specjalny przypadek tautolog.



Jeśli można rozwinąć w szereg Taylora:

$$f(x_0+h) < f(x_0) \qquad h \gtrless 0$$

$$\delta = f(x_0+h) - f(x_0) = h\, f'(x_0+\theta h) < 0$$

$$= h\, f'(x_0) + R_2 < 0$$

Tak samo dla Minimum

to jednak zmieniłoby znak z h ~~dla dodatnych~~

zatem $f'(x_0)=0$ wtedy $\delta = h^2 \frac{f''(x_0)}{2} + R_3$

jeśli $f''(x_0) \gtrless 0$ to $\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} \\ \text{Min.} \end{array} \right.$

Gdyby jednak $f''(x_0)=0$ $f'''(x_0) \gtrless 0$ to punkt przegięcia

Zatem Max Min: Jeśli wszystkie pochodne włącznie n-tej $=0$ n = nieparzysta

a $(n+1) \gtrless 0$; a znak jej rozstrzyga $\begin{array}{l} \text{Min.} \\ \text{Max} \end{array}$

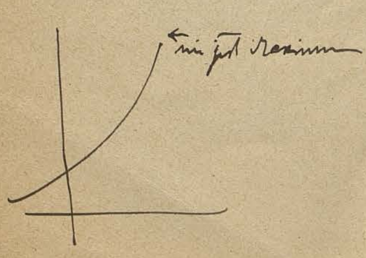
Jeśli $f(x,y)=0$ to $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$ ale $\frac{d^2y}{dx^2} \gtrless 0$ ...

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots \lessgtr 0$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad \Big| \text{ max min}$$



~~$y = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots$~~

~~$y' = m x^{m-1} + a x^{m-2} + b x^{m-3} \dots$~~

$y = x^m (a-x)^n \quad \Big\| \quad y' = x^{m-1}(a-x)^{n-1}\left[ma - (m+n)x\right] = 0$

$x = \frac{am}{m+n}$ Maximum $x = a$ (Min. n = pa) $x = 0$ (Min. m = pa)

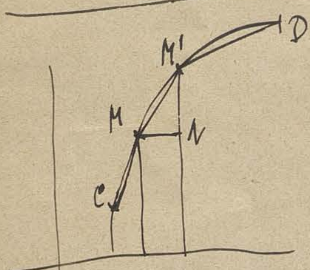
$y'' =$

$y = x^x \qquad y' = x^x\left[l(x) + 1\right] = 0 \qquad l(x) = -1$

$x = \frac{1}{e}$

$y'' = x^x\left\{\left[l(x) + 1\right]^2 + \frac{1}{x}\right\}$

$y'' = y \cdot e > 0$ Minimum



$MM' = \sqrt{MN^2 + NM'^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

$= \Delta x \sqrt{1 + f'^2(x + \vartheta \Delta x)} = \Delta x \left[\sqrt{1 + f'(x)^2} + \varepsilon\right]$

jeżeli funkcja jest ciągła i jeżeli
jeżeli lim egzystuje

$s = \lim \sum \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$

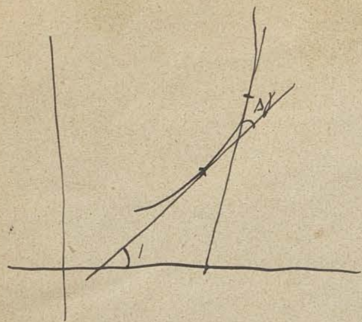
$= \int dx \sqrt{1 + f'(x)^2}$

~~$\Delta s \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$~~

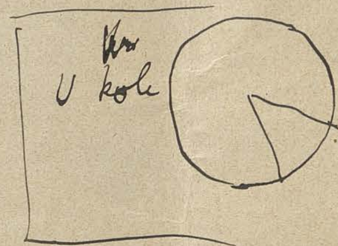
$\frac{MM'}{\Delta s} = \frac{\Delta x \sqrt{\dots}}{\Delta s}$

$\lim: = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{ds}{dx}} = 1$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad \frac{dx}{ds} = \cos \qquad \frac{dy}{ds} = \sin$



~~średnia~~ przeciętna wartość krzywizny $= \frac{\Delta\gamma}{\Delta s}$



$s = a\varphi$

krzywizna $= \frac{\varphi}{a\varphi} = \frac{1}{a}$

Promień krzywizny $\frac{1}{R} = \frac{d\gamma}{ds}$

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dy}{dx}$

$\frac{d\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx$

$\frac{d\gamma}{ds} = \cos^2\gamma \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds} =$ ~~$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{ds}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$~~ $=$

$= \cos^3\gamma\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3}}$

$R = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^{\,3}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{ds^3}{\frac{d^2y}{dx}}$

Koło = jedyna krzywa o krzywiźnie stałej

$ds = a\,d\gamma$

~~$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{a}$~~

$dx = ds\cos\gamma = a\cos\gamma\,d\gamma \qquad dy = a\sin\gamma\,d\gamma$

$= -d(a\sin\gamma) \qquad = d(a\cos\gamma)$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 = -a\sin\gamma \\ y - y_0 = a\cos\gamma \end{array}\right\} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

Współrzędne środka krzywizny $\xi = x - R\sin\alpha \qquad \eta = y + R\cos\alpha$

Środek krzywizny = punkt przecięcia dwóch nieskończ. bliskich normalnych

1

$\xi - x + (\eta - y)\frac{dy}{dx} = 0$

$\xi - x - \Delta x + (\eta - y - \Delta y)\frac{dy}{dx} + (\eta - y)\left(\frac{dy}{dx} + \Delta\frac{dy}{dx}\right) = 0$

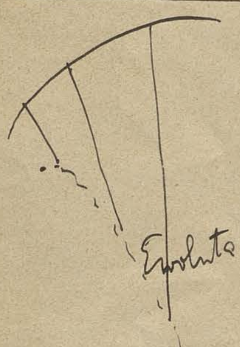
$V(\xi, \eta, x, y) = 0$ $\quad V(\xi, \eta, x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$

$\frac{dV}{dx}: \ldots \quad -1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\eta - y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

$$\eta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = R\cos\varphi$$

$$\xi - x = -\frac{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx} = -R\sin\varphi$$

$(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2 = R^2$



$\xi = x - R\sin\varphi$

$\eta = y + R\cos\varphi$

$d\xi = dx - R\cos\varphi\, d\varphi - dR\sin\varphi$

$d\eta = \underbrace{dy - R\sin\varphi\, d\varphi}_{=0 \text{ bo } R = \frac{ds}{d\varphi}} + dR\cos\varphi$

$d\xi = -dR\sin\varphi$

$d\eta = +dR\cos\varphi$

$\underbrace{d\xi^2 + d\eta^2}_{d\sigma^2} = (dR)^2$ $\quad \frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg}\varphi$ $\quad$ więc Normalne krzywej = styczne evoluty

$\sigma_1^2 = R_2 - R_1$ $\quad$ Jeśli się nawinie nić na Evolucie ...

Parabola $y^2 = 4px$ $\Big|$ $\xi = 3x + 2p$ $\quad \eta = -\frac{y^3}{4p^2}$ $\quad \eta^2 = \frac{4}{27}\frac{(\xi - 2p)^3}{p}$

$f(x, y, \alpha) = 0$ jednowartościowa!

Punkty przecięcia

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0 \\ f(x, y, \alpha + \Delta\alpha) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ jeśli z tego równania i z pierwszego wyrugujemy się α

to to będzie uporządkowało własciwości wspólnej wszystkich punktów przecięcia = obwiednia

---

Ona jest styczną do owych krzywych w punktach wspólnych

bo zadość czyni: $f(x\, y\, \alpha) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$

a kierunek stycznej w pewnym punkcie krzywych systemu: $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$

" " " " obwiedni: tam α jest już wyrażone przez $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$

zatem: $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0$

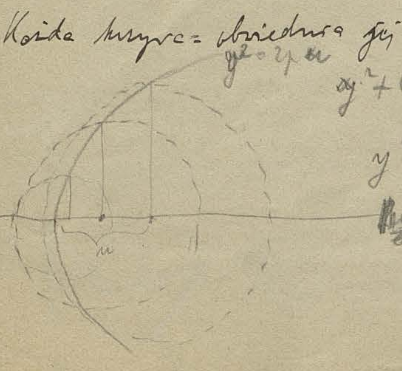
$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ zatem [illegible]

N. p. Ewoluta = obwiednia systemu normalnych

~~[illegible]~~ $\eta - y = (\xi - x) \frac{dx}{dy}$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $\frac{dy}{dx} = \dots\dots$ etc.

Każda krzywa = obwiednia jej stycznych



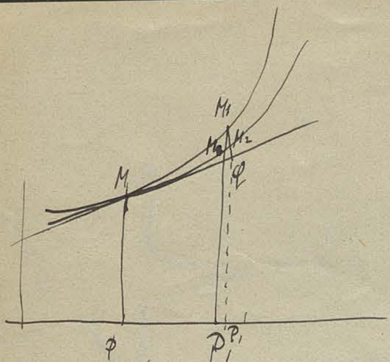
$$y^2 + (x-u)^2 = v^2 = 2pu$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 + (x-u)^2 &= 2pu \\ x - u &= p \end{aligned}\right\} u = x + p$$

~~$y^2 + p^2 = 2p(x+p)$~~

$$y^2 + p^2 = 2p(x+p)$$

$$y^2 = 2px + p^2$$



Jeśli w punkcie M_1 obie krzywe mają tę samą styczną to mówimy że one się dotykają w ...

To dotykanie może być jednak różnego rzędu

Jeśli stosunek $\frac{M_1M_2}{MQ}$ = nieskończ. mała rzędu $\mu+1$ to

mówimy że zachodzi styczność rzędu μ

Jeśli utworzymy ~~$\frac{M_1M_2 \cos\varphi}{MQ \cos\varphi}$~~ $= \frac{M_1M_3}{PP_1} = \frac{\frac{M_1M_2}{\cos\varphi}}{MQ\cos\varphi} = \frac{M_1M_2}{MQ}\frac{1}{\cos^2\varphi}$

to będzie zatem wielkość tego samego rzędu wielkości (jeśli nie przypadkowo $\varphi = \frac{\pi}{2}$)

zatem takie różnice mają być rzędami styczności do określenia

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \cdots$$

$$y_1' = y' + \frac{dy'}{dx}\Delta x + \cdots$$

$$\Delta y = (y-y') + \left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right)\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2}\right)\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{\mu+1!}\left(\frac{d^{\mu+1}y}{dx^{\mu+1}} - \frac{d^{\mu+1}y'}{dx^{\mu+1}}\right)\Delta x^{\mu+1} + \cdots$$

Aby była więc styczność rzędu μ to musi być

$y = y'$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$

...

$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{d^\mu y'}{dx^\mu}$

Zamiast powiedzieć że
Krzywe mają punkt styczności rzędu μ można także powiedzieć
że przecinają się w $\mu+1$ punktach nieskończenie bliskich

bo: $f(x) - F(x) = \varphi(x)$

$$\varphi(x)=0 \quad \varphi(x+h_1)=0 \quad \varphi(x+h_2)=0 \quad \dots \quad \varphi(x+h_\mu)=0$$

$$-\varphi(x) \qquad \varphi(x)$$

$$\varphi'(x+k_1)=0 \quad \varphi'(x+k_2)=0 \quad \varphi'(x+k_\mu)=0$$

$$\varphi'(x+k_1)=0 \qquad \varphi'(x+k_1)=0$$

$$\varphi''(x+l)=0 \qquad -$$

lim:

to: $\varphi(x)=0$ $\quad f(x)=F(x)$

$\varphi'(x)=0$

$\varphi^{\mu}(x)=0$ $\quad \frac{d^\mu f(x)}{dx} = \frac{d^\mu F(x)}{dx}$

Jeśli Równanie f dane, a w funkcji F jest n stałych dowolnych to można je tak oznaczyć że będziemy mieli w punkcie dowolnym styczność rzędu $(n-1)$

W prostej tylko 2 stałe zatem.

$$\eta = a\xi + b$$

$$\eta = y \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \qquad a = \frac{dy}{dx} \quad | \; b = y - x\frac{dy}{dx}$$

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

ogólne krzywe II mają 5 stałych zatem styczność rzędu 4

Koło. $y = y'$ $\quad (x-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = R^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$ $\quad (x-\alpha) + (y'-b)\frac{dy'}{dx} = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2}$ $\quad 1 + \left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + (y'-b)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0$

} koło krzywizny styczność rzędu 2go ponieważ 3 potęgi już się różnią będzie koło ~~wogół~~ zwykle przecinało krzywą, tylko w szczególnych położeniach zostaje zupełnie z jednej strony (tam styczność 3go rzędu)

Owe punkty osobliwe są przeto oznaczone że kierunek stycznej nieoznaczony

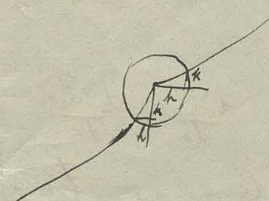
$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ ~~#~~. Jeśli ~~założymy~~ ~~założeniu że $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ same są funkcjami~~

~~jednowartościowemi~~ to to może tylko zajść tam gdzie

$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0$ wprawdzie odnosi się to bezpośrednio tylko do

ale można pokazać że także temu odpowiada [illegible] (Sarret)

Rozwijając w szereg Taylora:



~~Niech~~ $f(x_0, y_0) = 0$

~~#~~ $f(x_0+h, y_0+k) = 0 =$

$= \not{f(x_0,y_0)} + \not{h\frac{\partial f}{\partial x}} + \not{k\frac{\partial f}{\partial y}} + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} \quad\right) + \dots = 0$

I). Drugie pochodne nie są wszystkie $= 0$

wtedy R_3 znika w obrębie małym więc równanie ~~#~~ kwadratowe dla $\frac{h}{k} = \operatorname{tg}\varphi$

jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 > 0$ to żaden rzeczywisty punkt tylko urojony

... < 0 2 rzeczywiste pierwiastki ~~[illegible]~~ dla $\frac{h}{k} = \frac{-h}{-k}$

~~każdy także [illegible]~~ [illegible]

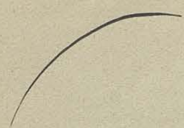
zatem 4 punkty = punkt podwójny

$= 0$ 2 równe pierwiastki

więc równie nigdy [illegible] gałęziami będzie oznaczone przez R_3 jeśli to nie jest $= 0$

to zmienia znak zatem na obu

stronach



wklęsłe $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ concav } jeśli $y > 0$

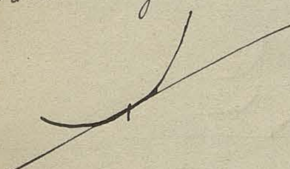
wypukłe $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ convex

wklęsłe $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ $y < 0$

wypukłe $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

Jeśli $=0$ to trzeba wziąć wyższe pochodne

Tak się z tego:



~~$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \Delta x$~~ } ~~$y = y_1 +$~~

~~$y = y_1 ...$~~

$$y = y_1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \Delta x + y'' \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$$

$$\eta = y_1 + y_1' \Delta x$$

$$y - \eta = y'' \frac{\Delta x^2}{2} + y''' \frac{\Delta x^3}{2.3} + \dots$$

więc jeśli $y'' > 0$ to wypukłe etc.

teraz jeśli $y'' = 0$ $y''' \gtrless 0$ to punkt przegięcia bo $y - \eta$ zmienia znak

$y'' = 0 = y'''$ $y^{IV} \gtrless 0$ to punkt styczności (wyższego 3^go rzędu) wypukłe wklęsłe

$y^{IV} = 0$ $y^{5} \gtrless 0$ punkt przegięcia etc.

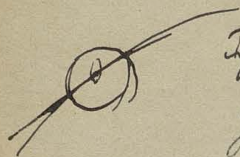
Np. $y = x^3 - ax^2 + bx + c$

$y' = 3x^2 - 2ax + b$

$y'' = 6x - 2a$

Punkty osobliwe

Koło



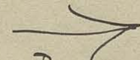
Tylko 2 punkty przecięcia, a prosta styczna lim = 180°

Jeżeli coś innego to osobl.

1) punkty wielokrotne

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

2). punkty zwrotu



I

II

$y = x \pm \sqrt{x^3}$

$y' = 1 \pm x^{\frac{1}{2}}$

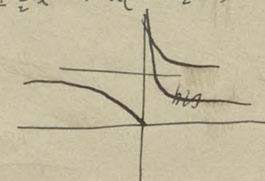
$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$

$y' = 0 = 2x \pm \frac{5}{2} x^{3/2} = x(2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{x})$

3). pojedyncze

4). końcowe

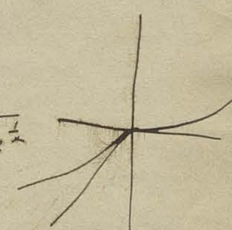
$y = e^{\frac{1}{x}}$ $\| x = 0$



5). załamania

$y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

$\left(\frac{y}{x}\right)_0 = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$



$(y-x)^2 = x^3$

$2(y-x) = 0$ | $-2(y-x) - 3x^2 = 0$

$y = 0$ $x = 0$

$(y-x^2)^2 = x^5$

Parabola: Koło krzywizny w punkcie $y=0$, $x=0$ $R = p$

$y^2 = 2p\xi$

$(x-p)^2 + y^2 = p^2$

$y^2 = 2px - x^2$

$y\frac{dy}{dx} = p - x$

~~$\frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y}$~~

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} = -1$

$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$

$y^3\frac{d^2y}{dx^2} = -y^2 - (p-x)^2$

$= x^2 - 2px - x^2 + 2px - p^2$

$= -p^2$

$\frac{dy}{d\xi} = \frac{p}{y}$

$\frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{p^2}{y^3}$

$\frac{d^3y}{d\xi^2} = \frac{p^3}{y^4}$

$\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{2} - ax\sqrt{2}\right)\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{2} + ax\sqrt{2}\right) = \frac{a^4}{4}$

$\left(x^2+y^2+\frac{a^2}{2}\right)^2 - 2a^2x^2 = \frac{a^4}{4}$

$(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2+y^2) + \frac{a^4}{4} - 2a^2x^2 = \frac{a^4}{4}$

Cissoida

$x = 2a \sin^2\theta$

$y = \frac{2a}{\operatorname{tg}\theta} - 2a\cos\theta\sin\theta$

$\frac{x}{2a} = \sin^2\theta$

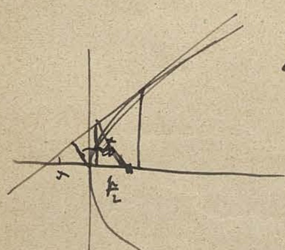
$\frac{y}{2a} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \cos\theta\sin\theta$

$= \frac{\cos^3\theta}{\sin\theta}$

$\frac{y^2}{4a^2} = \frac{\cos^6\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\left(1-\frac{x}{2a}\right)^3}{\frac{x}{2a}}$

$\rho = a\frac{\sqrt{x(8a-3x)^3}}{3(2a-x)^2}$

$xy^2 = (2a-x)^3$



$\xi = \left(x + \frac{p}{2}\right)\sin^2\varphi - x$

$\sin^2\varphi = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{p^2}{y^2+p^2} = \frac{p}{p+2x}$

$\eta = \left(x + \frac{p}{2}\right)\sin\varphi\cos\varphi$

$\eta = x + \frac{p}{2}$

$\xi = \frac{p}{2} - x$

$\xi = x\sin^2\varphi = x\sin^2\varphi = \frac{px}{p+2x}$

$\xi p + 2x\xi = px$

$x = \frac{\xi p}{p-2\xi}$

$\eta = x\sin\varphi\cos\varphi$

$\eta^2 = x^2\frac{p}{p+2x}\left(1-\frac{p}{p+2x}\right) = \frac{2x^3p}{(p+2x)^2} = \frac{2x}{p}\xi^2 = \frac{2\xi^3}{p-2\xi}$

$\eta^2(p-2\xi) = 2\xi^3$

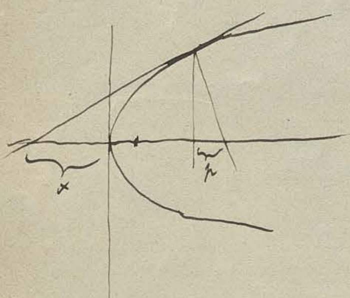
Jeżeli teraz także $R_3 = 0$ to dojdę do S_4 (Serret)

gdzie można otrzymać punkty podwójne izolowane, albo zwrotne drugiego rodzaju etc.

Parabola $y^2 = 2px$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}$$ zatem wszędzie wklęsła | Nie ma Max.

$$y\frac{dy}{dx} = p \qquad S_t = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y^2}{p} = 2x$$



$$R = -\frac{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = -\frac{(p^2+y^2)^{3/2}}{p^2}$$

$$R_{x=0} = -p \qquad \xi = 3x+p$$

do wykreślenia

$$\eta = -\frac{y^3}{p^2}$$

Ogólne krzywe 2. $y^2 = 2px + \rho x^2$

$$y\frac{dy}{dx} = p + \rho x \;\Big|^2$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \rho \;\Big|\; y^2$$

$$y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = -p^2$$

$$R = \frac{1+\dots}{\dots} = \frac{\left[y^2\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\right]^{3/2}}{p^2} = \frac{N^3}{p^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^2x}{a^2y^2}\,\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2y}\left(1+\frac{b^2x^2}{a^2y^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$$R = -\frac{a^2y^3}{b^4}\left[1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right]^{3/2} = -\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a^4}x^3 \qquad \eta = -\frac{a^2-b^2}{b^4}y^3$$

$$\frac{a^2-b^2}{a} = \alpha \qquad \frac{a^2-b^2}{b} = \beta$$

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{2/3} + \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

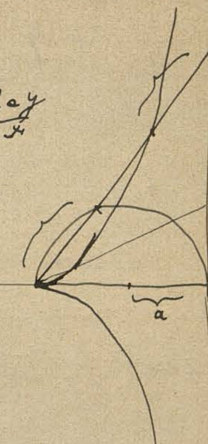
$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{El.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{array} \quad \text{punkty zwrotne}$$

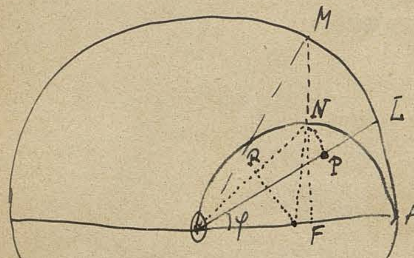
$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \quad \text{Hyp.}$$

Cissoida $(2a-x)y^2 = x^3$

$$\eta = \frac{4}{3}\,\frac{2ay}{x}$$



Lemniskata



$$\left[\left(x-\frac{a}{\sqrt2}\right)^2 + y^2\right]\left[\left(x+\frac{a}{\sqrt2}\right)^2 + y^2\right] = \left(\frac{a}{\sqrt2}\right)^4$$

$\overline{OA} = A$

$[A \cos 2\varphi] = OE$

$$\frac{OF}{r} = \frac{r}{2} : \frac{A}{2}$$

$$r^2 = A \cdot OF = A^2 \cos^2 2\varphi$$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) = a^2(x^2-y^2)$$

$$2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2} = a^2\left(x - y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2-2r^2)\,x}{(a^2+2r^2)\,y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max.} \ldots \\ \text{Min.}\end{array}\right\} 2x\,r^2 = a^2 x$$

$$r = \frac{a}{\sqrt2} \quad \Big\}\ \theta = \frac{\pi}{6}$$

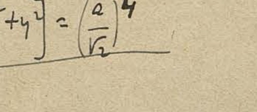
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x\,r^2 - 2a^2x = 2x(2r^2 - a^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y\,r^2 + 2a^2y = 2y(2r^2+a^2)$$

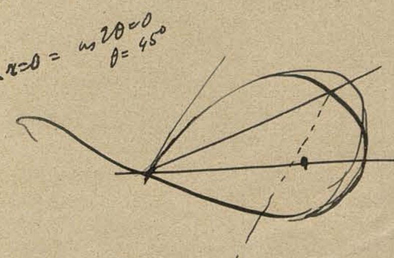
$\Big\}\ x, y = 0$ punkt podwójny

$$r = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$$

$$r' = -\frac{a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$



wyz. θ dla lim r=0 = cos 2θ=0
θ = 45°



$$\nu = 2\theta$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = -\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right) = \operatorname{ctg} 2\theta$$

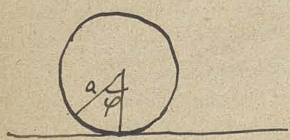
$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad a_1 = \frac{a^2-b^2}{a} \quad b_1 = \frac{a^2-b^2}{b}$$

$$R_b = a + a_1 \qquad R_a = b + b_1$$

$$S_{ab} = a + a_1 - b - b_1 = (a-b)\left[1 - (a+b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right] = \frac{a^3-b^3}{ab}$$

$$y^2 = \frac{8}{27}\frac{(x-p)^3}{p}$$

Cykloida:



$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = a(1 - \cos\varphi) \qquad \arccos\frac{a-y}{a} = \varphi$$

$$x = a\arccos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$$

$$dx = a(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$dy = a\sin\varphi\,d\varphi$$

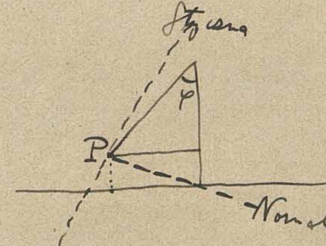
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$

} Punkt $\varphi=0$ osobliwy maximum dla $\varphi=\pi$

$$y\frac{dy}{dx} = S_n = a\sin\varphi$$

$$= \sqrt{2ay-y^2}$$

$$N = \sqrt{2ay}$$

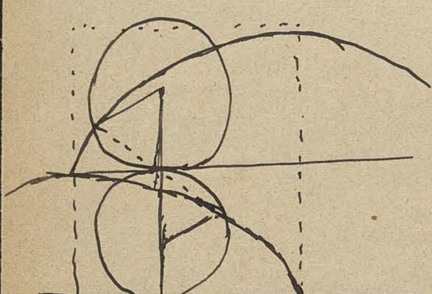


$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1-\cos\varphi)\cos\varphi - \sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\cos\varphi-1}{(1-\cos\varphi)^2}\frac{1}{a(1-\cos\varphi)} = -\frac{1}{a(1-\cos\varphi)^2} = -\frac{a}{y^2}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{2a}{y}-1\right) = \frac{2a}{y}$$

$$R = -\left(\frac{2a}{y}\right)^{3/2}\frac{y^2}{a} = -2\sqrt{2ay} = -2N$$

Z tego wynika że Ewoluta takiej będzie cykloidą taką samą:



Z tego n.p. długość łuku $S = 2(R)_{max} = 4\cdot 2a = 8a$

~~a pole ...~~

co naturalnie także bezpośrednio przez całkowanie

$$\cancel{\int \frac{2a\,dx}{y} = \int \frac{2a^2(1-\cos\varphi)\,d\varphi}{a(1-\cos\varphi)}}$$

$$\int\sqrt{\frac{2a}{y}}\,dx = \int\sqrt{\frac{2}{1-\cos\varphi}}\,(1-\cos\varphi)\,d\varphi = a\int\sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi$$

$$= 2a\int\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0 \quad 4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\ldots$$

Cassini.

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = b^4 - c^4$$

$= b^2 = PM \cdot PN$

Logarytmiczna:

$$\frac{x}{a} = \lg \frac{y}{b} \qquad y = b\, e^{\frac{x}{a}}$$

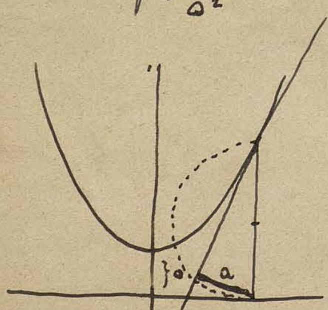
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} e^{\frac{x}{a}} \qquad \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = a = S_t$$

Łańcuchowa (catenaria)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad y^2 - a^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) = \left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]^2$$

$$= \sqrt{\frac{y^2-a^2}{a^2}}$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

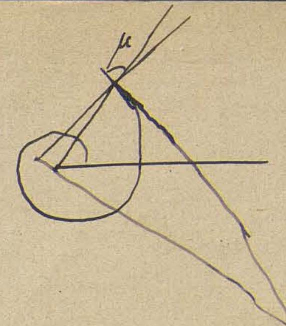
$$= \frac{y}{a}$$

$$\xi = x - R\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\ldots}} = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} = x - \frac{\frac{y^2}{a^2}\frac{\sqrt{y^2-a^2}}{a}}{\frac{y}{a^2}} = x - \frac{y}{a}\sqrt{y^2-a^2}$$

$$\eta = y + \frac{R}{\sqrt{\ }} = y + \frac{y^2}{a^2}\frac{a^2}{y} = 2y \qquad R = \frac{y^3}{a^3}\frac{a^2}{y} = \frac{y^2}{a} = N$$

$$N = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{y^2}{a}$$

Spiralna Archimedesa



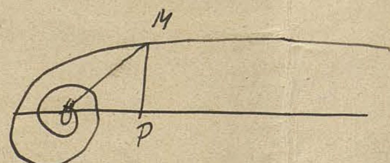
$r = a\vartheta$ $\qquad tg\,\mu = \frac{r}{r'} = \vartheta$

$r' = a$

$S_t = r\,tg\,\mu = a\vartheta^2$

$S_n = \frac{r}{tg\,\mu} = a$

Hiperboliczna Sp.



$r = \frac{a}{\vartheta}$

$r' = -\frac{a}{\vartheta^2}$

$MP = r \sin\vartheta = a\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ $\qquad \lim_{\vartheta=0} MP = a$

$tg\,\vartheta = -\frac{r\vartheta^2}{a} = -\vartheta$ $\qquad S_t = -a$ $\qquad S_n = -\frac{a}{\vartheta^2}$

Logarytmiczna Sp.

$r = a e^{m\vartheta}$ ~~mimo że 2 stałe to zawsze te same krzywe, tylko położenie inne~~

kształt jej nie zależy od a

$a' e^{m\vartheta} = a e^{m(\vartheta + \frac{1}{m} lg\frac{a'}{a})}$

$\frac{dr}{d\vartheta} = m a e^{m\vartheta} = m r$

$tg\,\mu = \frac{1}{m}$ | $S_t = \frac{r}{m}$ | $S_n = m r$ $\qquad N = \sqrt{m^2+1}\,.\,r$

$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = \sqrt{m^2+1}\, r\, d\vartheta = a\sqrt{m^2+1}\, e^{m\vartheta} d\vartheta = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m} dr$

$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m} r + \text{const}$

$$R = \frac{ds}{d\gamma} = \frac{ds}{d\mu + d\vartheta} = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{r\sqrt{m^2+1}\,d\vartheta}{d\vartheta} = r\sqrt{m^2+1} = \nu$$

$$\rho_1 = m\rho = m a e^{m\vartheta}$$

$$\vartheta + \frac{\pi}{2} = \vartheta_1$$

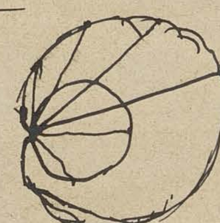
$$\rho_1 = m a e^{m(\vartheta_1 - \frac{\pi}{2})}$$

To będzie ta sama krzywa jeśli: $m e^{m(2k\pi - \frac{\pi}{2})} = 1$

$$m \ln m = -(4k-1)\frac{\pi}{2}$$

Dla każdego k jedna wartość m, zatem ∞ wiele takich --

Cardioida



$r = 2a(1+\cos\theta)$

$r' = -2a\sin\theta$

$r'' = -2a\cos\theta$

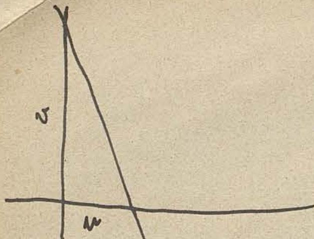
$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$R = \frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''} = \frac{\left[8a^2(1+\cos\theta)\right]^{3/2}}{4a^2(1+\cos\theta)^2 + 8a^2\sin^2\theta + 4a^2(\cos\theta+\cos^2\theta)} = \frac{8^{3/2}(1+\cos\theta)^{3/2}\cdot a}{12(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{12}\,a\,(1+\cos\theta)^{1/2} = \frac{4}{3}\sqrt{ar}$$

$$\gamma = \mu + \vartheta$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\mu + \operatorname{tg}\vartheta}{1 - \operatorname{tg}\mu\operatorname{tg}\vartheta} = \quad \Big\| \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\operatorname{tg}\theta + 1}{\operatorname{tg}\theta - \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{\operatorname{tg}\theta + 2\sin\theta}{\operatorname{tg}\theta\sin\theta - 1 - \cos\theta}$$



$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$$

$$uv = c^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{u} + \frac{yu}{c^2} &= 1 \\ \frac{x}{u^2} - \frac{y}{c^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad u = c\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{x}{c\sqrt{\frac{x}{y}}} + \frac{yc\sqrt{\frac{x}{y}}}{c^2} = 1$$

$$\sqrt{xy} = \frac{c}{2}$$

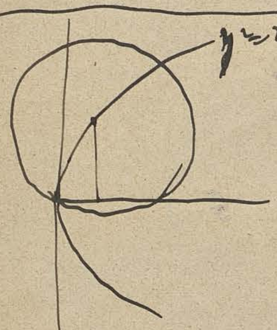
$$xy = \frac{c^2}{4}$$ Hip. równoboczna

Równanie krzywych II w spółrzędnych liniowych

$$\left.\begin{aligned} ux + vy &= 1 \\ Au^2 + Bv^2 + \dots &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$Au^2 + B\left(\frac{1-ux}{y}\right)^2 + \dots = 0$$

$$Au - B\frac{(1-ux)x}{y^2} + \dots = 0$$ } I stopnia dla $u = \dots$ wstawić do 1) [illegible]



$$(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = \eta^2 + \xi^2$$

~~$$(y-\eta)^2 + \left(x - \frac{\eta^2}{2p}\right)^2 = \eta^2 + \frac{\eta^4}{4p^2}$$~~

$$y^2 - 2\eta y + x^2 - 2x\xi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} y^2 - 2\eta y + x^2 - \frac{x\eta^2}{p} &= 0 \\ -2y - 2\frac{x\eta}{p} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\eta = -\frac{py}{x}$$

$$y^2 + \frac{2py^2}{x} + x^2 - \frac{py^2}{x} = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{py^2}{x} = 0$$

$$x^3 + (p+x)y^2 = 0$$ Cissoida

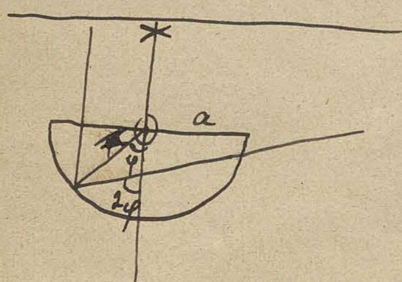
$a = \frac{p}{2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a + b = k$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k-a)^2} = 1$$

$$\vdots$$

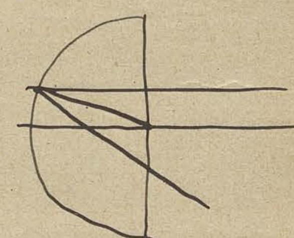
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$



$$y - y_1 = \operatorname{tg} 2\varphi \, (x - x_1)$$

$$y_1 = a \sin\varphi$$

$$x_1 = a \cos\varphi$$



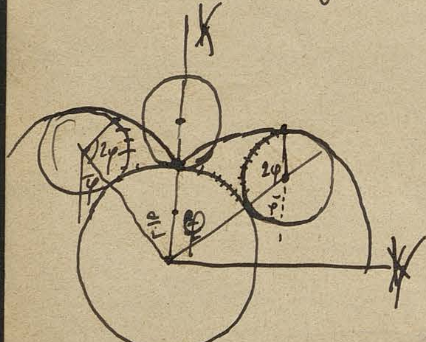
$$y - a \sin\varphi = \operatorname{tg} 2\varphi \, (x - a\cos\varphi)$$

$$y \cos 2\varphi - x \sin 2\varphi + a \sin\varphi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}: \quad y \sin 2\varphi + x \cos 2\varphi - \frac{a}{2}\cos\varphi = 0$$

$$x = \frac{a}{4}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi)$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$$



$$x = \frac{3a}{4}\cos\varphi - \frac{a}{4}\cos 3\varphi$$

$$y = \frac{3a}{4}\sin\varphi - \frac{a}{4}\sin 3\varphi$$

$$x^2 + y^2 = r^2 = \frac{a^2}{16}\Big[10 - 6\underbrace{(\cos\varphi\cos 3\varphi + \sin\varphi\sin 3\varphi)}_{\cos 2\varphi}\Big]$$

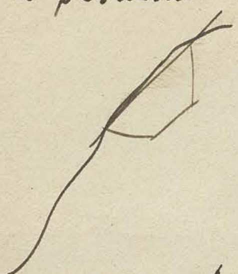
$$r^2 = \frac{a^2}{8}\left[5 - 3\cos 2\varphi\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{3a}{4}\sin\varphi + \frac{3a}{4}\sin 3\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = \frac{3a}{4}\cos\varphi - \frac{3a}{4}\cos 3\varphi$$

$\varphi = 0$
punkt zwrotu

W przestrzeni:



$$\eta - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\xi - x) \qquad \zeta - z = \frac{\Delta z}{\Delta x}(\xi - x)$$

$$\frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz} = \frac{\xi - x}{dx}$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma} = ds$$

płaszczyzna normalna: $(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0$

Jeśli $x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad z = \chi(t)$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - \chi(t)}{\chi'(t)}$$

$$[\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) + [\qquad]\,\chi'(t) = 0$$

$f(x, y, z) = 0 \qquad F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

$$dx : dz : dy = \xi - x : \eta - y : \zeta - z$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\zeta - y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \dots \dots - \quad - \qquad = 0 \end{array}\right\}$$

$f(x, y, z) = 0$ jeżeli jeszcze $F(x, y, z) = 0$ to krzywa przecięcia o stycznej zadanej

więc: $(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots = 0$ i tak samo $(\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x}$ —— $= 0$

Więc wszystkie F .. dowolne, prócz z tym samym równaniem

$(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots = 0$ zatem ta płaszczyzna zawiera wszystkie styczne

= płaszczyzna styczności. [Jeżeli $\frac{\partial f}{\partial x}$ etc. $\gtrless 0$]
inaczej punkt osobliwy

Normalna:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

Jeżeli płaszczyzna styczności przechodzi przez punkt $x_0 y_0 z_0$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ (x_0 - x)\frac{\partial f}{\partial x} + \ldots = 0 \end{array}\right\}$$ oznaczają punkty xyz styczności = krzywą

Łącząc $x_0 y_0 z_0$ z jednym takim punktem:

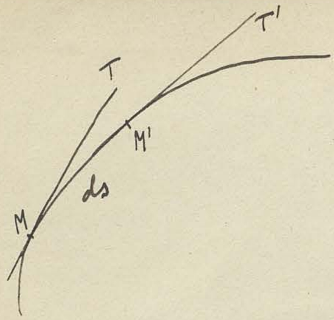
$$\frac{\xi - x_0}{x - x_0} = \frac{\eta - y_0}{y - y_0} = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}$$ wyrugujemy xyz z tych punktów = równanie stożka styczności.

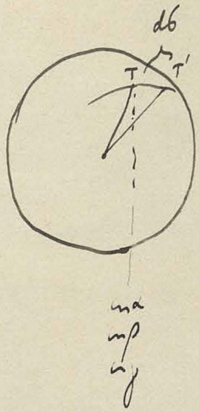
$$s = \lim \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \lim \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \neq \lim \sum \left(\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 +} + \varepsilon \ldots\right)$$

$$ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{array}\right\} \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2}$$

$dx = ds \cos a$
etc.





$$K = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}$$

$$d\sigma = \sqrt{d(\cos\alpha)^2 + d(\cos\beta)^2 + d(\cos\gamma)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + \cdots}}{ds}$$

$$\xi = \cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$K = \frac{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{R}$$

Jeśli s = niezależna zmienna

Styczna w punkcie T krzywej $\sigma \equiv$ normalna główna w punkcie M

Kierunek jej $\overbrace{\varphi\ \psi\ \chi}^{N}$

$$\cos\varphi = ~~\frac{d\cos\alpha}{d\sigma}~~ \frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} \qquad \cos\psi = \frac{d\cos\beta}{d\sigma} \qquad \cos\chi = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}$$

$$= \frac{ds}{d\sigma}\frac{d\cos\alpha}{ds} = R\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = R\,\frac{d^2x}{ds^2}$$ etc.

Jeśli ~~..~~ w płaszczyźnie NT wykreślimy koło o promieniu R, to środek jego $\equiv$ środek krzywizny, a ~~normalna~~ prostopadła do NT w tym punkcie = oś krzywizny

Środkowie: ona jest przecięciem dwóch nieskończ. bliskich płaszczyzn normalnych.

Normalna : $(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0$ $\qquad V = 0$

Nieskończ. bliska: $[\xi - x + \Delta x](\cos\alpha + \Delta\cos\alpha) + \ldots = 0$ $\qquad V + dV = 0$

$dV = 0$: ~~$d\cos\alpha$~~

$$(\xi - x)\, d\cos\alpha + (\eta - y)\, d\cos\beta + (\zeta - z)\, d\cos\gamma - \underbrace{(dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma)}_{ds} = 0$$

$$(\xi - x)\frac{d\cos\alpha}{ds} + \sim \quad = 1$$

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\varphi}{R}$$

$$(\xi - x)\cos\varphi + (\eta - y)\cos\psi + (\zeta - z)\cos\chi = R$$

} $\perp$ do N odległ. od punktu $M = R$

zatem przecięcie faktycznie =

Miejsce środka krzywizny:

$x_1 - x = R\cos\varphi$ etc.

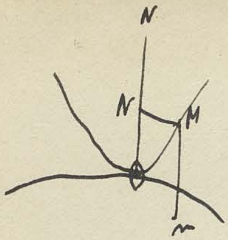
Oś krzywizny: $\lambda\ \mu\ \nu$ $\qquad \cos\lambda = \cos$

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0 \quad \Big|\ \cos\chi$$

$$\cos\lambda\cos\varphi + \cos\mu\cos\psi + \cos\nu\cos\chi = 0 \quad \Big|\ \cos\gamma$$

$$\cos\lambda(\cos\alpha\cos\chi - \cos\varphi\cos\gamma) + \cos\mu(\cos\beta\cos\chi - \cos\psi\cos\gamma) = 0$$

$$\begin{cases} \cos\lambda = \cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi \\ \cos\mu = \cos\gamma\cos\varphi - \cos\alpha\cos\chi \\ \cos\nu = \end{cases} \begin{matrix} = R\dfrac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{ds^3} \\ = \ldots \\ = - \end{matrix}$$



Styczność rzędu k jeśli $\frac{Mm}{(MN)^{k+1}} = \text{st.}$

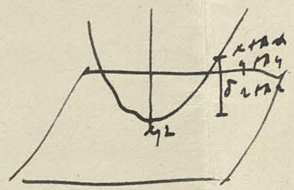
Styczność wyższa jeśli (punkt wspólny i jeśli) styczna krzywej zawarta w płaszczyźnie styczności

jeśli n stałych to można je tak

wyznaczyć że będzie n warunków, zatem styczność rzędu (n−1)

Płaszczyzna 3 stałe, zatem styczność II ~~stopnia~~ rzędu

$$a\xi + b\eta + c\zeta - p = 0$$



$$\delta = a(x+\Delta x) + b(y+\Delta y) + c(z+\Delta z) - p$$

$$\Delta x = \frac{dx}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s^2 + - \text{ etc.}$$

$$\delta = \underbrace{ax+by+cz-p}_{=0} + \underbrace{\left(a\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds} + c\frac{dz}{ds}\right)}_{=0}\Delta s + \frac{1}{2}\underbrace{\left(a\frac{d^2x}{ds^2} + b\frac{d^2y}{ds^2} + c\frac{d^2z}{ds^2}\right)}_{=0}\Delta s^2 + -$$

$$\frac{a}{dy\,d^2z - dz\,d^2y} = \frac{b}{dz\,d^2x - dx\,d^2z} = \frac{c}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$$

$a = \cos\lambda$ etc. między osią płaszczyzna a NT

płaszcz. ściśle styczna = przechodzi przez 3 nsk. bliskie punkty

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz - p = 0 \\ a(x + dx) + b(y + dy) + c(z + dz) - p = 0 \\ a\left(x + dx + \frac{1}{2} d^2x\right) + \dots \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \\ a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z = 0 \end{array}$$

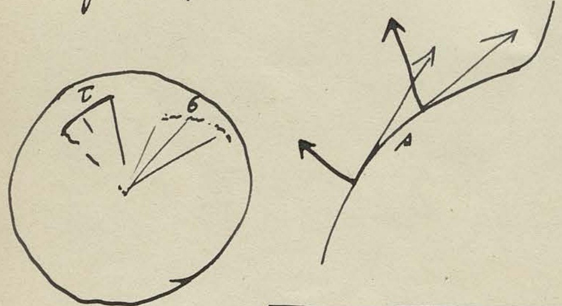
więc i odwrotnie można określić płt. ś. st. jako płt. zawierającą 3 punkty

a normalna główna = przecięcie jej z płt. normalną.

naturalnie przechodzi ona także przez styczną i punkt nsk. bliski

zawiera koło krzywizny.

Druga krzywizna: skręt



płaszczyzna / oś krzywizny (binormalna) opisuje kąt τ

$$\frac{d\tau}{ds} = \text{skręt}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = T = \text{promień skrętu}$$

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$

Równanie płaszczyzny ściśle stycznej:

$$(x - \xi)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + (y - \eta)(\dots \qquad = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - \xi & \eta - y & \zeta - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0$$

$$d\tau^2 = (d\cos\lambda)^2 + (\ )^2 + (\ )^2$$

$$dx = ds \cos\alpha \qquad \tau_x = \cos\lambda$$

$$d(\cos\alpha) = d\sigma \cos\xi \qquad \tau_y = \cos\mu \qquad \sqrt{l^2+m^2+n^2} = \frac{ds^3}{R}$$

$$\tau_z = \cos\nu$$

~~$d(\cos\varphi) =$~~

$$\cos\lambda = R\,\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} \sim \underbrace{dy\,d^2z - dz\,d^2y}_{l} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$d\tau^2 = \frac{(dl)^2+(dm)^2+(dn)^2}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} + \frac{[l(l\,dl+m\,dm+n\,dn)]^2+[\dots]^2+[\ ]^2}{(l^2+m^2+n^2)^3}$$

$$-2\,\frac{(l\,dl+m\,dm+n\,dn)^2}{(l^2+m^2+n^2)^{\ }}$$

$$= \frac{dl^2+dm^2+dn^2}{l^2+m^2+n^2} - \frac{(l\,dl+m\,dm+n\,dn)^2}{(l^2+m^2+n^2)^2}$$

$$= \frac{(l\,dm-m\,dl)^2+(m\,dn-n\,dm)^2+(n\,dl-l\,dn)^2}{(l^2+m^2+n^2)^2}$$

$$l = dy\,d^2z - dz\,d^2y \quad\Big|\quad dl = dy\,d^3z - dz\,d^3y$$

$$m = dz\,d^2x - dx\,d^2z$$

$$l\,dm - m\,dl = (dy\,d^3z - dz\,d^3y)(dy\,d^2z - dz\,d^2y) - (\quad)$$

$$= dz\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} \qquad T = \frac{ds^6}{R^2|\ |} = \frac{(dy\,d^2z-\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}{|\ |}$$

więc rozsądna funkcja

$$d\tau^2 = \frac{|\ |^2(dz^2+dx^2+dy^2)}{(l^2+m^2+n^2)^2} \Big/ d\tau = \frac{ds^{\ }}{(l^2+m^2+n^2)^{\ }}\begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix} = ,$$

Jinak $T=\infty$

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & & \\ d^3x & & \end{vmatrix} = 0$$

Jinak x jako [illegible]

$$dx \begin{vmatrix} d^2y & d^2z \\ d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

$$d\left(\frac{d^2y}{d^2z}\right) = 0$$

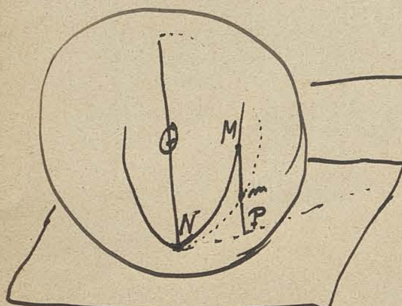
$$d^2z = B\,d^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = B\frac{dy}{dx} + A$$

$$z = By + Ax + C$$

Kula okulacyjna

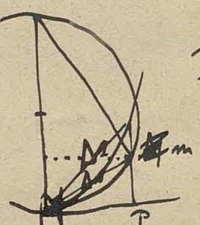
~~$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$~~



$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

$$\frac{(x-a)(\xi-x)+(y-b)(\eta-y)+(z-c)(\zeta-z)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+\dots}}=0$$

$$Mm = MP - mP \qquad = \frac{(x-a)(\xi-x)+\dots}{r}$$



~~$mP = \frac{\Delta s^2}{2r}$~~ ~~$Mm = MP - \frac{\Delta s^2}{2r}$~~

$$\Delta s \begin{cases}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{cases}$$

$$mP = \frac{Nm^2}{2r} = \frac{NP^2+Pm^2}{r} = \frac{NM^2-MP^2+Pm^2}{r} = \frac{\Delta s^2-\overbrace{(Pm-MP)}^{0^3}(Pm+MP)}{r}$$

zatem $mP=\frac{\Delta s^2}{r}$

$$-MP = \frac{(x-a)\Delta x+(y-b)\Delta y+(z-c)\Delta z}{r}$$

$$-(x-a)\Delta x \pm (y-b)\Delta y \pm (z-c)\Delta z - \tfrac{1}{2}\Delta s^2 = 0^4$$

~~$\Delta x = dx + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds}ds + \frac{d^3x}{}$~~

$$\Delta x = \frac{dx}{ds}\Delta s + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{ds^2}\Delta s^2 + \dots$$

$$(x-a)\frac{dx}{ds}+(y-b)\frac{dy}{ds}+(z-c)\frac{dz}{ds}=0$$

$$(x-a)\frac{d^2x}{ds^2}+(\dots \qquad +1=0$$

$$(x-a)\frac{d^3x}{ds^3}+\dots \qquad =0$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\dots=0$$

$$V=(x-a)^2+\dots-r^2=0$$

$$\frac{dV}{ds}=0$$

$$\frac{d^2V}{ds^2}=0$$

$$\frac{d^3V}{ds^3}=0$$

Kula ~~ost~~ ściśle styczna = ta która przechodzi przez 4 nieskończenie bliskie punkty.

$V = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$

$V(x + \frac{dx}{dx_1} y + k_1 z \quad -) = 0$ $\qquad dV_1 = 0$

$V \ldots$

itd.

$(\xi - x)\, dx + (\eta - y)\, dy + (\zeta - z)\, dz = 0$ } Równanie normalnej

$(\xi - x)\, d^2x + (\eta - y)\, d^2y + (\zeta - z)\, d^2z - ds^2 = 0$ } Te same 3 równania jak

$(\xi - x)\, d^3x + \ldots \qquad = 0$ } tam które służą do ob... $\frac{x-a}{ds}$.

$$\xi - x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & dy & dz \\ ds^2 & d^2y & d^2z \\ 0 & d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dx & & \\ d^2x & & \\ d^3x & & \end{vmatrix}} = \frac{ds^2 \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^3y & d^3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dy\, d^3z - dz\, d^3y}{ds^4} =$$

$$\frac{d}{ds}\Big(\underbrace{\frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{ds^3}}\Big)$$

$$\frac{\cos\varphi}{R}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vdots \end{vmatrix}} = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos\varphi}{R}\right)}{\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}} = \frac{\cos\varphi \frac{d\frac{1}{R}}{ds} + \frac{1}{R}\frac{d\cos\varphi}{ds}}{\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}}$$

$$= R\cos\lambda - T\frac{dR}{ds}\cos\varphi$$

~~$r^2 = \Sigma(\xi - x)^2 + \ldots =$~~

$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta \ldots = 0$

$(\xi - x)\cos\varphi + \ldots \qquad = R$

$(\xi - x)\cos\lambda + \ldots \qquad = -T\frac{dR}{ds}$

$$r^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

→ zatem odległość $\xi\,\eta\,\zeta$ od płaszczyzny ściśle... $= T\frac{dR}{ds} = \sqrt{r^2 - R^2}$ ...

$(x-\xi)\cos\alpha + \cdots \qquad = 0$

$(x-\xi)\frac{d\cos\alpha}{d\sigma} + ~~\dots~~ \qquad = -\underbrace{dx\cos\alpha + \cdots}$

$\frac{ds}{d\sigma} = R$

$(x-\xi)\overset{N}{\cos\varphi} + \cdots \qquad = R$

$(x-\xi)\left(\cos\lambda\frac{d\tau}{ds} + \cos\alpha\frac{d\sigma}{}\right) + \cdots = \frac{dR}{ds}$

$(x-\xi)\cos\lambda = \qquad T\frac{dR}{ds}$

$(x-\xi) = R\cos\varphi - T\frac{dR}{ds}\cos\lambda$

$\therefore$

$r^2 = R^2 + T^2\frac{dR^2}{ds^2}$

$$\overset{T}{\cos\alpha}\,\overset{K}{\cos\lambda} + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0 \qquad \Big\| \qquad \cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 \qquad \Big\| \qquad \cos\lambda\, \underset{d\cos\varphi}{\underset{\|}{d\cos\alpha}} + \cos\mu\, d\cos\beta + \cos\nu\, d\cos\gamma = 0$$

$\frac{d}{d}\ldots$

$$\left.\begin{aligned} &\cos\alpha\, d\cos\lambda + \cos\beta\, d\cos\mu + \cos\gamma\, d\cos\nu = 0 \\ &\cos\lambda\, d\cos\lambda + \cos\mu\, d\cos\mu + \cos\nu\, d\cos\nu = 0 \end{aligned}\right\}$$

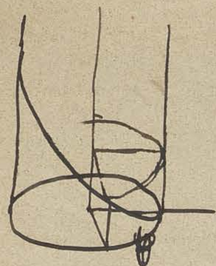
$$\frac{d(\cos\lambda)}{d(\cos\alpha)} = \frac{d(\cos\mu)}{d(\cos\beta)} = \frac{d(\cos\nu)}{d(\cos\gamma)}$$

$$d\cos\alpha = \cos\varphi\, ds$$

$$\sout{d\cos\lambda}\ \cos\varphi = \frac{d(\cos\lambda)}{\sqrt{(\ )^2 + \ldots}} = \frac{d\cos\lambda}{d\tau}$$

$$\begin{cases} d\cos\lambda = \cos\varphi\, d\tau \\ d\cos\mu = \cos\psi\, d\tau \\ d\cos\nu = \cos\chi\, d\tau \end{cases} \qquad \cos\varphi = \cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta$$

$$d\cos\varphi = \underbrace{(\cos\psi\cos\gamma - \cos\chi\cos\beta)}_{-\cos\lambda}\, d\tau + (\cos\mu\underbrace{\cos\chi - \cos\nu\cos\psi)}_{-\cos\alpha}\, d\sigma$$



$x = a\cos\varphi$ $\qquad dx = -a\sin\varphi\, d\varphi$

$y = a\sin\varphi$ $\qquad dy = a\cos\varphi\, d\varphi$

$z = a\varphi\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon$ $\qquad dz = a\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon\, d\varphi$

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\sin\varepsilon}$$

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = -\sin\varepsilon\sin\varphi$

$\cos\beta = \sin\varepsilon\cos\varphi$

$\cos\gamma = \cos\varepsilon$ $= \underline{\text{const}}$!)

$d(\cos\alpha) = d\sigma\cos\varphi = -\sin\varepsilon\cos\varphi\, d\varphi$

$d\sigma\cos\psi = -\sin\varepsilon\sin\varphi\, d\varphi$

$d\sigma\cos\chi = 0$

$d\sigma = \sin\varepsilon\, d\varphi$

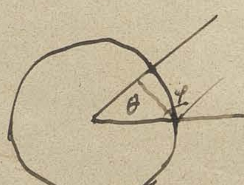
$\cos\varphi = -\cos\theta$

$\cos\psi = -\sin\theta$

$\cos\chi = 0$

} 1.-atum Normalen
puer os'

2.-atum



$\cos\varphi = -\cos\theta$

$\cos\psi = \cos(90 \pm \varphi) = \sin\varphi = -\sin\theta$

$\theta = \pi + \varphi$

$$R = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{a\,d\varphi}{\sin^2\varepsilon\, d\varphi} = \frac{a}{\sin^2\varepsilon} = \text{const}$$

~~dλ φ z dτ~~

$\cos\lambda = \cos\beta\cos\chi - \cos\gamma\cos\psi = +\cos\varepsilon\sin\theta$

$\cos\mu = \cos\gamma\cos\varphi - \cos\alpha\cos\chi = -\cos\varepsilon\cos\theta$

$\cos\nu = \cos\alpha\cos\psi - \cos\beta\cos\varphi = +\sin\varepsilon\sin^2\theta + \sin\varepsilon\cos^2\theta = \sin\varepsilon = \text{const}$

$d\tau^2 = (d\cos\lambda)^2 + \cdots = d\theta^2\cos^2\varepsilon$

$$T = \frac{ds}{d\tau} = \frac{a\,d\theta}{\sin\varepsilon\cdot\cos^2\varepsilon\, d\theta} = \frac{a}{\sin\varepsilon\cos\varepsilon} = \text{const}$$

Obwiednie

$f(x\, y\, z, \alpha) = 0$ } ~~obra~~ α wyrugować

$f(x\, y\, z\, \alpha + \Delta\alpha) = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ } charakterystyka

Jeśli 3 powierzchnie: trzecią zastąpić przez $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$

tedy przecięcie charakterystyki = punkt

geom. miejsce tego punktu (wyrugowawszy α) = Rückkehrcurve

arête de rebroussement

krzywa zwrotu

Powierzchnie odwijalne

obwiednie systemu płaszczyzn

$ax + by + cz - p = 0 \qquad abcp = f_\cdot(\alpha)$

$a'x + b'y + c'z - p' = 0 \qquad$ —

charakt. = prosta

Obw. ma styczność z ~~[illegible]~~ powierzchnią systemu wzdłuż charakterystyki.

$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$ } w pow.

$\frac{\partial f}{\partial x} dx + — \qquad + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0$ } wzdłuż ~~charakt.~~ obwiedni

($\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$)

więc jeśli dx, dy to do zmienia się im

Analogicznie:

Równ. charakt. $\begin{cases} f=0 \\ f'=0 \end{cases}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0$

$\frac{\partial f'}{\partial x} + \ldots = 0$

Te same równania stałej - [dla krzywej zwrotu] ginki

Zatem: Wszystkie charakt. są stycznemi do krzywej zwrotu.

Ponieważ prosta = charakterystyka systemu odwijalnego = styczna do krzywej zwrotu

to pow. odwijalna = miejsce geom. prostych stycznych krzywej.

a ~~płasz~~ ~~ows~~ rodzaju = płaszcz. ~~stycz~~ ściśle styczna krzywej zwrotu

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz - p &= 0 \\ a'x + b'y + c'z - p' &= 0 \\ a''x + b''y + c''z - p'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz &= 0 \\ a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (a\,d^2x + a'\,dx) + \ldots &= 0 \\ a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z &= 0 \end{aligned}$$

więc te same równania $\begin{aligned} ax + \ldots &= 0 \\ a\,dx + \ldots &= 0 \\ a\,d^2x + \ldots &= 0 \end{aligned}$

Oś krzyw. była oznaczona przez:

$V=0, \quad dV=0, \quad$ a na niej środek kuli ścisl. $d^2V=0$

więc tworzą system płaszczyzn, których obwiednia = pow. biegunowa,

a na niej środek kuli ścisłej. = krzywa zwrotu

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\beta}$$

Jeżeli $\theta = 0$:

$$R_0 = \frac{\sqrt{}}{\ldots} \qquad \text{więc} \quad R = R_0 \cos\theta$$

R = iloczyn R owego przekroju normalnego który zawiera styczną, i cos kąta który ten przekrój tworzy z płaszcz. ściśle styczną krzywej.

Więc tylko krzywizny przekroju normalnych potrzeba znać.

Układ spółrzędnych w ten sposób że XY = pł. styczna

$\cos\gamma = 0 \quad \cos\beta = \sin\alpha$

$\sqrt{1+p^2+q^2} = 1$

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\cos 2\alpha + s\sin 2\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R}\right) = 2(t-r)\sin\alpha\cos\alpha + 2s(\cos^2-\sin^2\alpha) = 0$$

$$(t-r)\sin 2\alpha + 2s\cos 2\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2s}{r-t} \qquad \begin{matrix}\text{Max}\\ \text{Min}\end{matrix}$$

$$s = \frac{r-t}{2}\operatorname{tg} 2\alpha_0$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \frac{r-t}{2}\Big[\underbrace{\cos 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha_0 \sin 2\alpha}_{\frac{\cos 2(\alpha-\alpha_0)}{\cos 2\alpha_0}}\Big]$$

$$\cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4s^2}{(r-t)^2}}}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \cos 2(\alpha-\alpha_0)\sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$$

Max. n.p. dla $\alpha = \alpha_0$

wtedy Min. dla $\alpha = \alpha_0 + \pi$

max $\frac{1}{R_1} = \frac{r+t}{2} + \sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$

min $\frac{1}{R_2} = \frac{r+t}{2} - \sqrt{s^2+\left(\frac{r-t}{2}\right)^2}$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = (r+t)$$

$\frac{1}{R_1'} = \frac{r+t}{2} + \cos\varepsilon\sqrt{}$

$\frac{1}{R_2'} = \frac{r+t}{2} - \cos\varepsilon\sqrt{}$

$\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'} = \ldots$

$$2\frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \cos 2\varepsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 2\frac{1}{R_1}\cos^2\varepsilon + \frac{2}{R_2}\sin^2\varepsilon$$

$\cos 2\varepsilon = 1-2\sin^2\varepsilon$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varepsilon + \frac{1}{R_2}\sin^2\varepsilon$$

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1}\cos^2\left(\varepsilon+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{R_2}\sin^2\left(\varepsilon+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\varepsilon}{R_1} + \frac{\cos^2\varepsilon}{R_2}$$

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Czy R zachowuje wszędzie ten sam znak zależy od stosunku $\frac{\frac{r+t}{2}}{\sqrt{\ldots}}$

$$\frac{1}{R_1}\,\frac{1}{R_2} = \left(\frac{r+t}{2}\right)^2 - \left[s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2\right] = rt - s^2$$

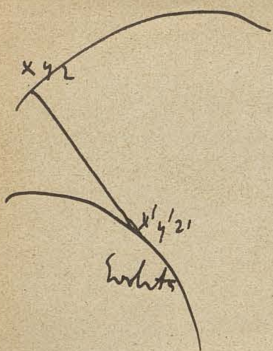
więc jeżeli $rt > s^2$ to zupełnie wklęsłe albo wypukłe

(Elipsoida, Hyperb. II, Parab. elipt.)

jeżeli $rt < s^2$ to

$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}\cos^2\varepsilon - \frac{1}{(R_2)}\sin^2\varepsilon = 0$ dla $\operatorname{tg}\varepsilon = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$ Hyperb. I, Parab. hip.

$rt = s^2$ ‖ $R_2 = \infty$ [Walce i Stożki wogóle powierzchnie rozwijalne



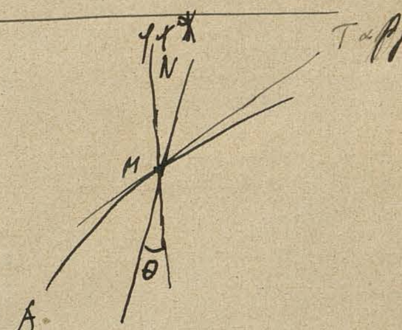
$$u = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

$$x'-x = u \cos\alpha'$$

$$y'-y = u \cos\beta'$$

$$z'-z = u \cos\gamma'$$

$$ds' = du$$



1). $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy$

2). $dp = r\,dx + s\,dy$

$dq = s\,dx + t\,dy$

$d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2$

3). $\cos\alpha = \frac{1}{R}\frac{dx}{d\sigma} \dots$

4). $\cos\varphi = \frac{d\cos\alpha}{d\sigma} \dots$

Normales: $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\dots}} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \frac{-q}{\sqrt{}}, \frac{1}{\sqrt{}}$

$$\cos\theta = \frac{-\chi - p\cos\varphi - q\cos\psi}{\sqrt{}} = \frac{d\cos\gamma - p\,d\cos\alpha - q\,d\cos\beta}{\sqrt{}}$$

$$d\cos\gamma = (p\,d\cos\alpha + q\,d\cos\beta) + (dp\cos\alpha + dq\cos\beta)$$

1).: $\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta$

2). $dp = R\,d\sigma\,(r\cos\alpha + s\cos\beta)$

$dq = R\,d\sigma\,(s\cos\alpha + t\cos\beta)$

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$$

Jeżeli $R_1 = R_2$: $\quad s^2 + \left(\frac{r-t}{2}\right)^2 = 0$

$$\begin{cases} s = 0 \\ r = t \end{cases} \qquad \text{Nabelpunkte}$$

Na elipsoidzie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2}{a^2 z} + \frac{c^2 x}{a^2 z^2}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$r = -\frac{c^2}{a^2 z} - \frac{c^4 x^2}{a^4 z^3} \Big|_{\substack{x=0\\ z=c}} = -\frac{c}{a^2}$$

$$t = -\frac{c^2}{b^2 z} - \frac{c^4 y^2}{b^4 z^3} = -\frac{c}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = +\frac{c^2 y}{b^2 z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^4 x y}{a^2 b^2 z^3}$$

$xy = 0$

$\neq 0$

~~$s = +\frac{c^2}{a^2 z^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{2c^2 x}{a^2 z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{c^2 x}{a^2 z^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$~~

4 takie punkty na końcach osi wielkiej i małej

$$r = \frac{c^4\overbrace{\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2}\right)}^{1-\frac{y^2}{b^2}}}{a^2 z^3} = \frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3}$$

~~$z = z_0 + p\Delta x + q\Delta y$~~ $+ \left(r\frac{\Delta x^2}{2} + s\,\Delta x\Delta y + t\frac{\Delta y^2}{2}\right) + \dots$

Indicatrix

$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = \pm c$

Krzywa II odniesiona do środka sp.

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{44} = 0$

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ Hiperboliczna krzywizna

< 0 Eliptyczna — —

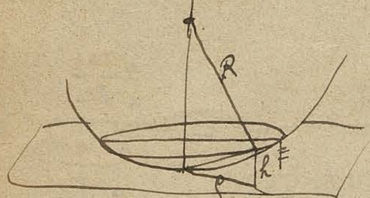
$= 0$ Paraboliczna krzywizna

(2 proste)

$s^2 - rt > 0$ Hyp. $\frac{1}{R_1}$ $\frac{-1}{R_2}$

$s^2 - rt < 0$ El. $\frac{1}{R_1}$ $\frac{1}{R_2}$

$s^2 = rt$ Par. Walec



$R = \lim \frac{\rho^2}{2h}$ = ~~$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\sin\alpha + t\sin^2\alpha$~~

$= \frac{\rho^2}{r\xi^2 + 2s\xi\eta + \dots} = \frac{1}{r\cos^2\alpha + \dots}$

Więc ten sam rezultat co przedtem

Dla punktów sferycznych Indicatrix będzie kołem.

$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}$

$\cos\gamma = p\cos\alpha + q\cos\beta \quad |^2$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\cos^2\alpha(1+p^2) + 2pq\cos\alpha\cos\beta + (1+q^2)\cos^2\beta = 1$

$\left(1+p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{}}\right)\cos^2\alpha + 2\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{}}\right)\cos\alpha\cos\beta + \left(1+q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{}}\right)\cos^2\beta = 0$

Jeżeli R dane to $\frac{\text{ur}}{\text{us}}$ oznaczyć

W punktach sferycznych ↓ to musi być nie oznaczone, zatem współczynniki = 0

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t} = \frac{pq}{s} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

N. p. elipsoida:

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z}$$

$$q = -\frac{c^2y}{b^2z}$$

$$r = -\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}$$

$$s = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}$$

$$t = -\frac{c^4(a^2-x^2)}{a^2b^2z^3}$$

$$-\frac{1+\left(\frac{c^2x}{a^2z}\right)^2}{\frac{c}{a^2}} = -\frac{1+\left(\frac{c^2y}{b^2z}\right)^2}{\frac{c}{b^2}} = -\frac{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^2}}{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}} = -z = \frac{R}{\sqrt{1+-}}$$

$$1+\left(\frac{c^2x}{za^2}\right)^2 = \frac{zc}{a^2} \quad\Big|\quad 1+\left(\frac{c^2y}{b^2z}\right)^2 = \frac{zc}{b^2}$$

~~Na przekroju ale tej. wysz.~~ ~~$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$~~

$$\frac{1+\left(\frac{c^2x}{a^2z}\right)^2}{-\frac{c^2}{a^2z}-\frac{c^4x^2}{a^4z^3}} = \frac{1}{-\frac{c^2}{a^2z}} = \frac{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^2}}{-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}} = -z$$

$$\frac{-\frac{c^4(b^2-y^2)}{a^2b^2z^3}}{1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}} = \frac{-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}}{\frac{c^4xy}{a^2b^2z^2}} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{c^4(b^2-y^2)}{b^2} = a^2z^2+\frac{c^4x^2}{a^2}$$

$$\frac{c^2}{b^2}(b^2-y^2) = a^2\frac{z^2}{c^2}+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$c^2-\frac{a^2z^2}{c^2} = c^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1+\left(\frac{c^2y}{b^2z}\right)^2}{-\frac{c^2}{b^2z}-\frac{c^4y^2}{b^4z^3}}$$

$$1+\left(\frac{c^2x}{a^2z}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}$$

$$a^4z^2+c^4x^2 = a^2c^2z^2+c^4x^2$$

$$(a^2-c^2)z^2=0$$

Tak samo:

$$(b^2-c^2)z^2=0$$

Tak samo dla innych osi więc albo $x, y, z = 0$

$$\left(\frac{c^2}{b^2 z} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^3}\right)\left(1 + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^2}\right) = \left(\frac{c^2}{a^2 z} + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^3}\right)\left(1 + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^2}\right)$$

$$\frac{c^2}{b^2 z} + \frac{c^4 y^2}{b^4 z^3} + \frac{c^6 x^2}{a^4 b^2 z^3} = \frac{c^2}{a^2 z} + \frac{c^4 x^2}{a^4 z^3} + \frac{c^6 y^2}{a^2 b^4 z^3}$$

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{c^2}{z^2}\left(\frac{y^2}{b^4} - \frac{x^2}{a^4}\right) + \frac{c^4}{a^2 b^2 z^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

$$+ \frac{x^2 c^2}{a^4 z^2}\left[\frac{c^2}{b^2} - 1\right] + \frac{y^2 c^2}{b^4 z^2}\left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + \frac{x^2}{a^4}\left[\frac{c^2}{b^2} - 1\right] + \frac{y^2}{b^4}\left[1 - \frac{c^2}{a^2}\right] = 0$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + x^2\left[\frac{c^2 - b^2}{a^4 b^2} - \frac{a^2 - b^2}{a^4 b^2}\right] + y^2\left[\frac{a^2 - c^2}{b^4 a^2} - \frac{a^2 - b^2}{b^4 a^2}\right] = 0$$

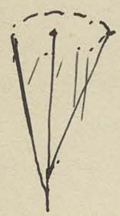
$$(a^2 - b^2) + x^2 \frac{c^2 - a^2}{a^2} + y^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2} = 0$$

Jeśli $a > b > c$:

$$a^2 - b^2 = -y^2 \frac{b^2 - c^2}{b^2} + x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

N.p. $y = 0$ $\quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$ $\quad z = \pm c\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}$

Jeżeli wszędzie w otoczeniu punktu P wykreślimy normalne na obwodzie kółeczka to tylko 2 z nich przetną się z normalną w P



z tych punktów znów dalej etc

linie krzywiznowe

Jeżeli wystawimy sobie indicatrix (wskaźnicę) to widzimy

(ponieważ element powierzchni można uważać jako [illegible])

[w pierwszym przypadku jako pow. I, w drugim jako pow. II]

że te kierunki będą osi głównych indicatrix zatem przecięciami głównych krzywizn

Więc 2 systemy linij krzywiznowych 1). w kierunku jednego przecięcia głównego

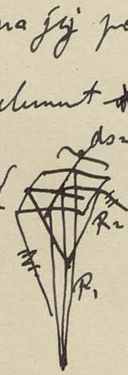
2). w drugiego " "

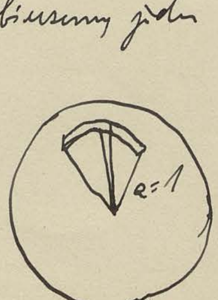
Przez te systemy ⊥ więc cała powierzchnia rozkrojona na □ elementy □

Gaussa Miara Krzywizny

Na brzegu elementu pow. wykreślamy normalne; i z pewnego środka kuli proste równoległe które wytną na jej pow. pewną (φ) Miara Krzyw. = pole f / pole φ

Jako taki element f obieramy jeden taki element utworzony przez linie krzywizny





$$df = ds_1\, ds_2$$

$$d\varphi = d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 = \frac{ds_1}{R_1} \cdot \frac{ds_2}{R_2} = \frac{df}{R_1 R_2}$$

$$K_g = \frac{1}{R_1 R_2}$$

Linie krzywiznowe

Normalna: $\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1}$

1). $\begin{cases} \xi - x + p(\zeta - z) = 0 \\ \eta - y + q(\zeta - z) = 0 \end{cases}$ || w punkcie niesk. bliskim:

$\xi - x - dx + (p + dp)(\zeta - z - dz) = 0$

. ---

2). $\begin{cases} +dx \pm dp(\zeta - z) + p\,dz = 0 \\ dy \pm dq(\zeta - z) + q\,dz = 0 \end{cases} = \frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$ (3).

ponieważ jednak punkt niesk. bliski ma leżeć na powierzchni więc

$dz = p\,dx + q\,dy \qquad dp = r\,dx + s\,dy$

$dq =$

Wstawiając to do (3):

$$\frac{(1+p^2)dx + pq\,dy}{r\,dx + s\,dy} = \frac{pq\,dx + (1+q^2)dy}{s\,dx + t\,dy}$$

Co można ~~łatwo~~ uporządkować:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + P\frac{dy}{dx} + Q = 0 \qquad P = \frac{(1+p^2)t - (1+q^2)r}{pqt - (1+q^2)s}$$

$$Q = \frac{(1+p^2)s - pqr}{pqt - (1+q^2)s}$$

Linie asymptotyczne Przez punkty w kierunkach

~~gdzie R=0 — 2~~ gdzie $R = \infty$

ich pł. ściśle styczne = styczna do pow.

bo zawiera 3 punkty niesk. bliskie

$$r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta = 0 \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}$$

$$r + 2s\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2} = 0$$

Linie poziome = przekroje płaszczyznami ∥ XY

$$dz = p\,dx + q\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

Linie najszybszego spadku, gdzie styczna ~~jest~~ ta między wszystkiemi możliwemi stycznemi powierzchni które ma największe nachylenie — więc ⊥ do linii poziomych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$$ [Więc system ortogonalny

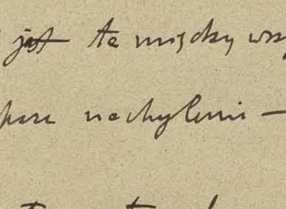
Np. elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z} \qquad q = -\frac{c^2y}{b^2z} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_p = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \frac{a^2y}{b^2x}$$

$$b^2\frac{dy}{y} = a^2\frac{dx}{x}$$

$$\lg y^{b^2} = \lg x^{a^2}$$



$y = c\,x^{\frac{a^2}{b^2}}$ zgodnie z równ. el.

Powierzchnie ~~Sz...~~ potrójnie ortogonalne

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x y z) = \lambda \\ f_2(x y z) = \mu \\ f_3(x y z) = \nu \end{array}\right\}$$ można wziąć: $x = F(\lambda \mu \nu)$, $y =$, $z =$ — $\lambda \mu \nu$ uważać jako spółrzędne

Warunek:

Normalna, $\dfrac{\frac{\partial\lambda}{\partial x}}{L}$ $\dfrac{\frac{\partial\lambda}{\partial y}}{L}$ $\dfrac{\frac{\partial\lambda}{\partial z}}{L}$ $L = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2}$

2 $\dfrac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{M}$ — —

$\dfrac{\frac{\partial\nu}{\partial x}}{N}$ ——

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial y} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\nu}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \text{——} \quad \text{——} = 0$$

Twierdzenie ~~Dy~~ Dupina: Krzywe przecięcia są liniami krzywizny.

N. p. Powierzchnie współogniskowe II stopnia taki system

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a^2 - b^2 = e_1^2 \qquad b^2 = a^2 - e_1^2$$

$$a^2 - c^2 = e_2^2 \qquad c^2 = a^2 - e_2^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{\lambda^2 - e^2} + \dfrac{z^2}{\lambda^2 - f^2} = 1 & \text{El.} \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - e^2} - \dfrac{z^2}{f^2 - \mu^2} = 1 & \text{Hyp. 1} \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{e^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{f^2 - \nu^2} = 1 & \text{Hyp. II} \end{array}\right\}$$ Tutaj jednak wygodniej wyrachować $x y z$ jako fkc. $(\lambda \mu \nu)$

Pow. liniowe odw. i nieodw.
wichrowate

$x = a z + \alpha \qquad y = b z + \beta$

$x = f_1(\alpha) . z + \alpha \qquad y = f_2(\alpha) z + f_3(\alpha)$

pow. odw. = obwiednia płaszcz. ruchomej ∥, ~~które~~ której tworzącą jest owa pr.

zatem prosta musi ~~być~~ leżeć w pł.

zatem $(x - a z - \alpha) + \lambda (y - b z - \beta) = 0 \qquad \lambda = f_4(\alpha)$

aby otrzymać obwiednię:

$$-(z\, da + d\alpha) - \lambda (z\, db + d\beta) + d\lambda (y - bz - \beta) = 0$$

a to musi być ta sama jak owe pierwotne równania
więc uwzględniając tamte:

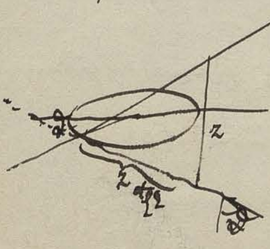
$z\, da + d\alpha + \lambda (z\, db + d\beta) = 0$

dla wszystkich z:

~~$z\, da + d\alpha$~~ $\quad da + \lambda\, db = 0$

$d\alpha + \lambda\, d\beta = 0$ $\Big\}$ $da\, d\beta - db\, d\alpha = 0$

N. p. prosta pod ~~kąt~~ ε na obwodzie koła



$y = a \sin\vartheta + z \operatorname{ctg}\varepsilon \cos\vartheta$

$x = a \cos\vartheta - z \operatorname{ctg}\varepsilon \sin\vartheta$

$y^2 + x^2 = a^2 + z^2 \operatorname{ctg}^2 \varepsilon$

$\frac{y^2 + x^2}{a^2} - \frac{z^2}{(a \operatorname{tg}\varepsilon)^2} = 1$

Hyp. I.

Czy odwijalna?

$$\frac{da}{d\vartheta}\frac{d\beta}{d\vartheta}-\frac{d\alpha}{d\vartheta}\frac{db}{d\vartheta}=-\frac{d}{d\vartheta}(\mathrm{ctg}\,\varepsilon\sin\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}(a\cos\vartheta)$$

$$-\frac{d}{d\vartheta}(a\sin\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}(\mathrm{ctg}\,\varepsilon\cos\vartheta)=$$

$$=-a\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon\,[\cos^2\theta+\sin^2\theta]=-a\,\mathrm{ctg}\,\varepsilon\neq 0$$

zatem nie odwijalna

Naturalnie poniewaz ~~sąsiednie~~ sąsiednie tworzące są skośne.

Gdybyśmy zrobili $a=0$ to by był stożek odwijalny.

POLSKIE
TOWARZYSTWO PRZYRODNIKÓW
IM. KOPERNIKA.

Lwów dnia ....